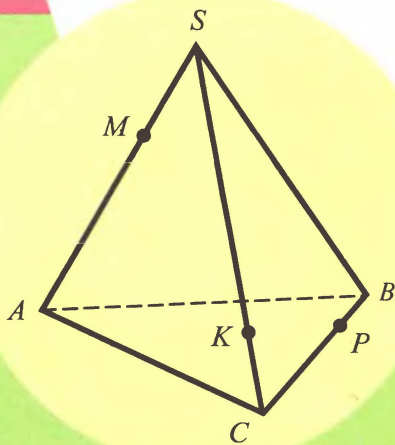


# МАТЕМАТИКА

Задачи и упражнения  
на готовых  
чертежах



Е.М.Рабинович

## ГЕОМЕТРИЯ

*10-11 классы*

В ПОМОЩЬ СТАРШЕКЛАССНИКАМ, ПРЕПОДАВАТЕЛЯМ  
И АБИТУРИЕНТАМ

---

Е. М. Рабинович

**Задачи  
и упражнения  
на готовых чертежах**

10-11 классы

ГЕОМЕТРИЯ

«ИЛЕКСА»  
«ГИМНАЗИЯ»  
Москва—Харьков  
2006

**Рабинович Е. М.**

Задачи и упражнения на готовых чертежах. 10-11 классы. Геометрия.—М.: Илекса, 2006.—80 с.

ISSN 5-89237-068-2

ЛР № 064344 от 9.12.95. Подписано в печать 20.11.02.  
Печать офсетная. Формат 70×90/16. Бумага книжно-журнальная.  
Тираж 10 000 экз. Заказ 2576.

ООО «Илекса», 121354, г. Москва, а/я 282.  
Заказы по телефонам: в Москве (495) 365-30-55

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени  
«Чеховский полиграфический комбинат».  
142300, г. Чехов Московской области,  
тел./факс (501) 443-92-17, (272) 6-25-36.  
E-mail:marketing@chpk.ru

**ISBN 5-89237-068-2**

© Рабинович Е. М., 2001

© ООО «Илекса», 2001

## Предисловие

Учитель математики, работающий в старших классах, хорошо знает, как трудно научить учеников делать наглядные и правильные чертежи к стереометрическим задачам.

Из-за недостатка пространственного воображения стереометрическая задача, к которой нужно сделать чертеж самостоятельно, зачастую становится для ученика непосильной.

Именно поэтому использование готовых чертежей к стереометрическим задачам значительно увеличивает объем рассматриваемого на уроке материала, повышает его эффективность.

Предлагаемое пособие является дополнительным сборником задач по геометрии для учащихся 10–11 классов общеобразовательной школы и ориентировано на учебник А.В. Погорелова "Геометрия 7—11". Оно является продолжением аналогичного пособия для учащихся 7–9 классов.

Пособие составлено в виде таблиц и содержит более 350 задач. Задачи каждой таблицы соответствуют определенной теме школьного курса геометрии 10–11 классов и расположены внутри таблицы в порядке возрастания их сложности.

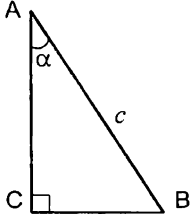
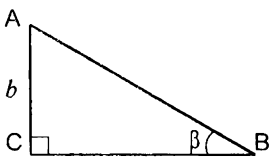
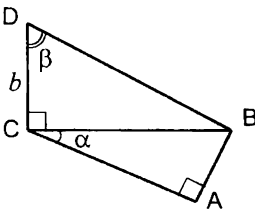
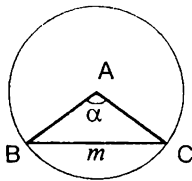
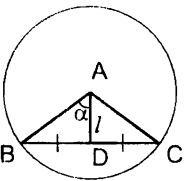
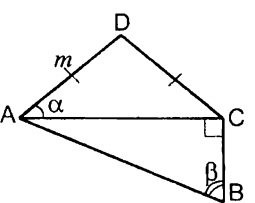
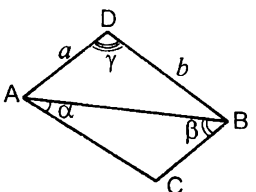
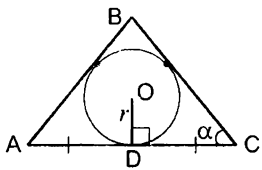
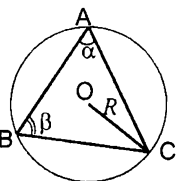
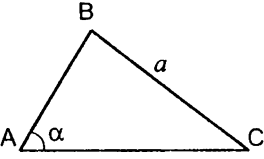
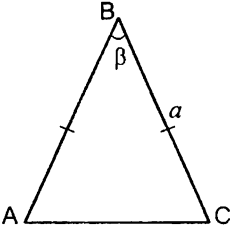
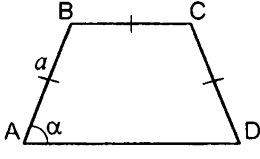
В пособии 24 таблицы для 10 класса и 26 таблиц для 11 класса, а также 4 таблицы на повторение курса планиметрии 7–9 классов.

К большинству задач приведены ответы, указания и решения.

Автор надеется, что использование данного пособия будет способствовать развитию пространственного воображения у учащихся и лучшему усвоению материала школьной программы.

## Повторение курса планиметрии

Таблица 1. Решение треугольников.

Найти неизвестные стороны и углы $\triangle ABC$		
<p><b>1</b></p> 	<p><b>2</b></p> 	<p><b>3</b></p> 
<p><b>4</b></p>  <p>Дано: <math>A</math> – центр окружности</p>	<p><b>5</b></p>  <p>Дано: <math>A</math> – центр окружности</p>	<p><b>6</b></p> 
<p><b>7</b></p> 	<p><b>8</b></p>  <p>Дано: <math>O</math> – центр окружности, вписанной в <math>\triangle ABC</math></p>	<p><b>9</b></p>  <p>Дано: <math>O</math> – центр окружности, описанной около <math>\triangle ABC</math></p>
Найти радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$		
<p><b>10</b></p> 	<p><b>11</b></p> 	<p><b>12</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – трапеция.</p>

Повторение курса планиметрии

Таблица 2. Площадь треугольника.

$O$  – центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ ,  $O_1$  – центр окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ . Найти площадь  $\triangle ABC$ .

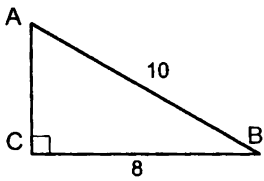
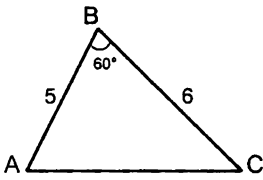
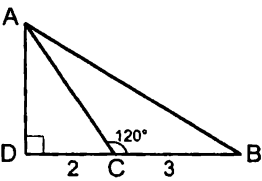
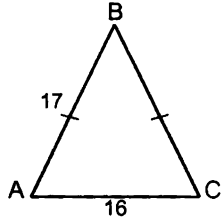
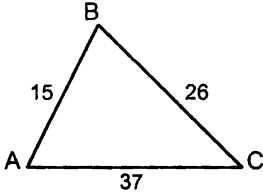
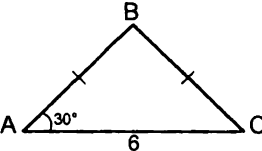
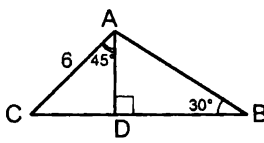
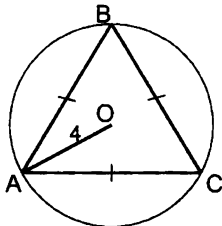
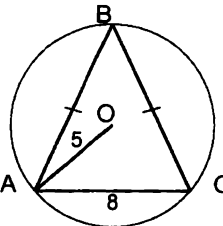
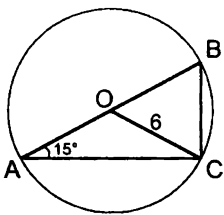
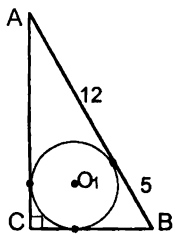
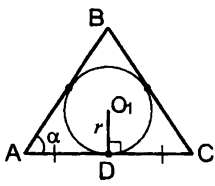
<p><b>1</b></p> 	<p><b>2</b></p> 	<p><b>3</b></p> 
<p><b>4</b></p> 	<p><b>5</b></p> 	<p><b>6</b></p> 
<p><b>7</b></p> 	<p><b>8</b></p> 	<p><b>9</b></p> 
<p><b>10</b></p> 	<p><b>11</b></p> 	<p><b>12</b></p> 

Таблица 3. Площадь четырехугольника.

$O$  – центр вписанной окружности.

Найти площадь четырехугольника  $ABCD$ .

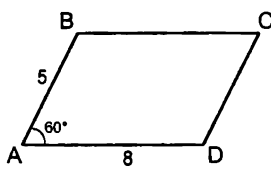
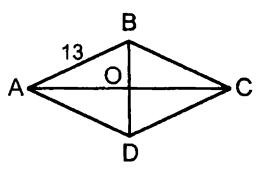
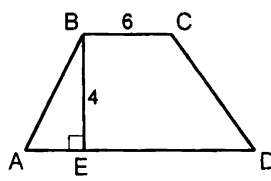
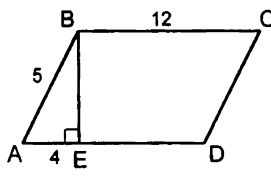
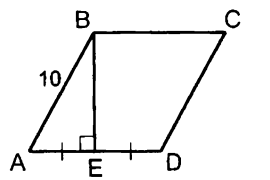
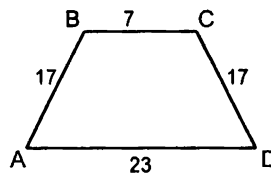
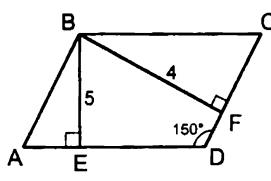
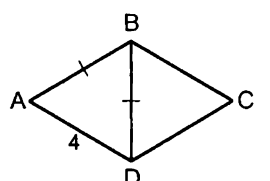
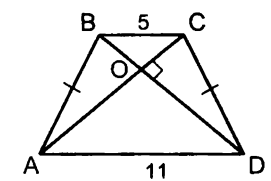
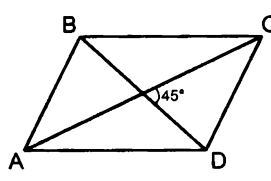
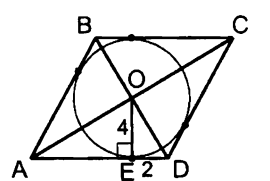
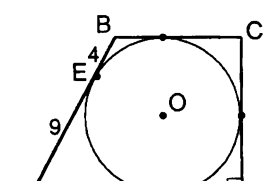
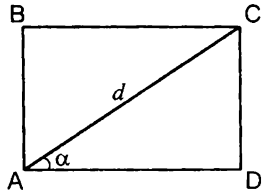
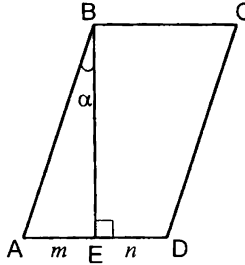
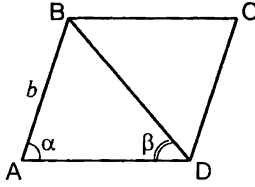
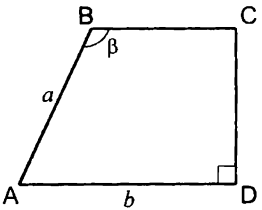
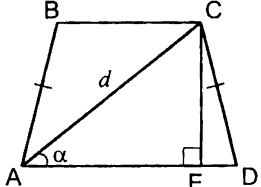
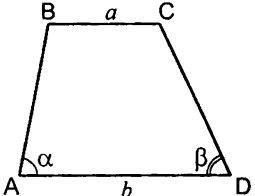
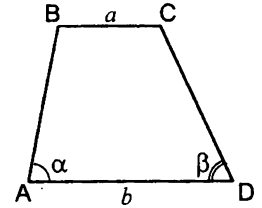
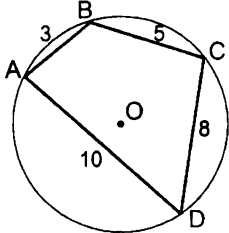
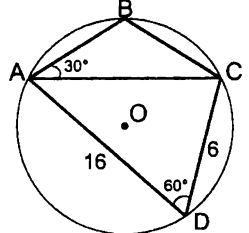
Параллелограмм	Ромб	Трапеция
<p><b>1</b></p> 	<p><b>5</b></p>  <p>Дано: <math>AC=24</math></p>	<p><b>9</b></p>  <p>Дано: <math>AD=10</math></p>
<p><b>2</b></p> 	<p><b>6</b></p> 	<p><b>10</b></p> 
<p><b>3</b></p> 	<p><b>7</b></p> 	<p><b>11</b></p> 
<p><b>4</b></p>  <p>Дано: <math>AC=9, BD=8</math></p>	<p><b>8</b></p> 	<p><b>12</b></p> 



Таблица 4. Площадь четырехугольника.

$O$  – центр описанной окружности.

Найти площадь четырехугольника  $ABCD$ .

<p><b>1</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – прямоугольник.</p>	<p><b>2</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – параллелограмм.</p>	<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – параллелограмм.</p>
<p><b>4</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – трапеция.</p>	<p><b>5</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – трапеция.</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – трапеция.</p>
<p><b>7</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – трапеция.</p>	<p><b>8</b></p> 	<p><b>9</b></p> 

## Стереометрия. 10 класс.

Таблица 10.1. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия.

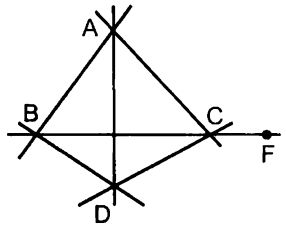
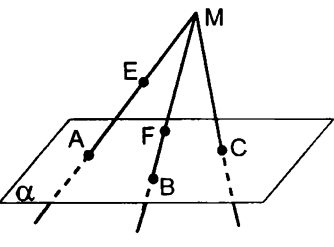
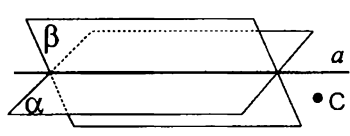
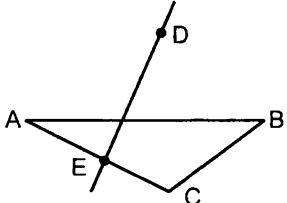
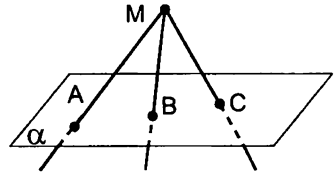
<p>1</p> 	<p>Дано: точки <math>A, B, C</math> и <math>D</math> не лежат в одной плоскости. Указать:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) плоскости, которым принадлежит: а) прямая <math>AB</math>; б) точка <math>F</math>; в) точка <math>C</math>.</li> <li>2) прямую пересечения плоскостей: а) <math>ABC</math> и <math>ACD</math>; б) <math>ABD</math> и <math>DCF</math>.</li> </ol>
<p>2</p> 	<p>Дано: точка <math>M</math> лежит вне плоскости <math>\alpha</math>, а точки <math>A, B</math> и <math>C</math> принадлежат этой плоскости.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Принадлежит ли точка <math>F</math> плоскости <math>\alpha</math>?</li> <li>2) Указать прямую пересечения плоскостей: а) <math>\alpha</math> и <math>ABM</math>; б) <math>ABM</math> и <math>BMC</math>.</li> <li>3) Может ли точка <math>E</math> принадлежать плоскости <math>\alpha</math>?</li> <li>4) Принадлежит ли прямая <math>AC</math> плоскости <math>MBC</math>?</li> </ol>
<p>3</p>  <p>Дано: плоскости <math>\alpha</math> и <math>\beta</math> пересекаются по прямой <math>a</math>. Может ли точка <math>C</math> принадлежать плоскостям <math>\alpha</math> и <math>\beta</math>?</p>	<p>4</p>  <p>Дано: точка <math>D</math> лежит вне плоскости <math>ABC</math>. Пересекаются ли прямые <math>DE</math> и <math>BC</math>?</p>
<p>5</p> 	<p>Дано: лучи <math>MA, MB</math> и <math>MC</math> лежат в одной плоскости и пересекают плоскость <math>\alpha</math> в точках <math>A, B</math> и <math>C</math>. Доказать, что точки <math>A, B</math> и <math>C</math> лежат на одной прямой.</p>

Таблица 10.2. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия.

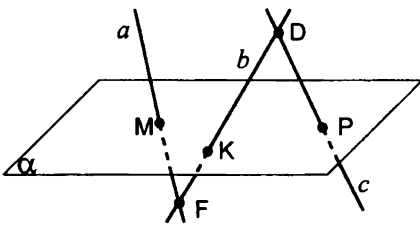
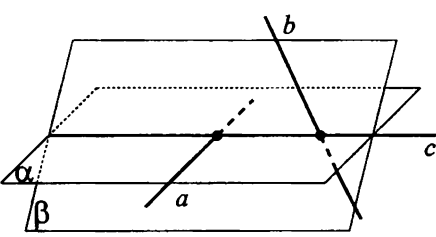
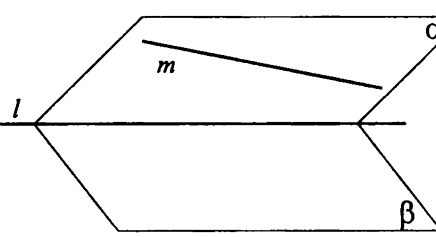
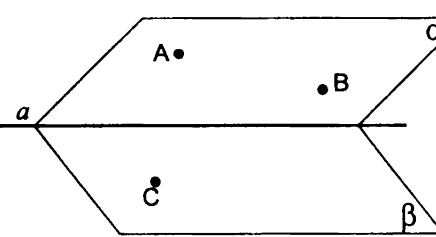
<p>1</p> 	<p>Дано: прямые <math>a</math>, <math>b</math> и <math>c</math> пересекают плоскость <math>\alpha</math> в точках <math>M</math>, <math>K</math> и <math>P</math>. Лежат ли прямые <math>a</math>, <math>b</math> и <math>c</math> в одной плоскости?</p>
<p>2</p> 	<p>Дано: прямая <math>c</math> – линия пересечения плоскостей <math>\alpha</math> и <math>\beta</math>. Прямые <math>a</math> и <math>b</math> принадлежат плоскостям <math>\alpha</math> и <math>\beta</math> соответственно. Доказать: прямые <math>a</math> и <math>b</math> не лежат в одной плоскости.</p>
<p>3</p> 	<p>Дано: плоскости <math>\alpha</math> и <math>\beta</math> пересекаются по прямой <math>l</math>. Прямая <math>m</math> принадлежит плоскости <math>\alpha</math>. Построить точку пересечения прямой <math>m</math> и плоскости <math>\beta</math>.</p>
<p>4</p> 	<p>Дано: плоскости <math>\alpha</math> и <math>\beta</math> пересекаются по прямой <math>a</math>. Точки <math>A</math> и <math>B</math> принадлежат плоскости <math>\alpha</math>, а точка <math>C</math> – плоскости <math>\beta</math>. Построить прямые пересечения плоскости <math>ABC</math> с плоскостями <math>\alpha</math> и <math>\beta</math>.</p>

Таблица 10.3. Параллельность прямых в пространстве.  
Скрещивающиеся прямые.

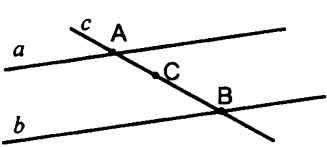
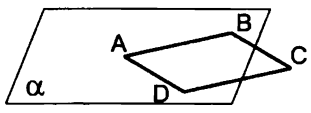
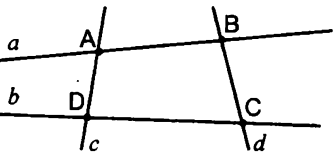
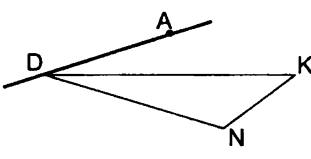
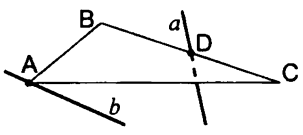
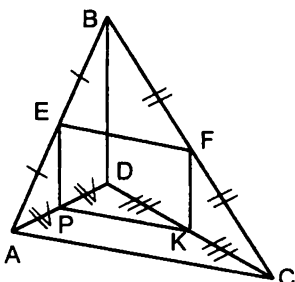
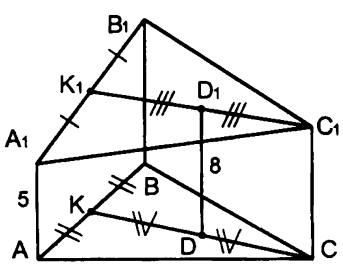
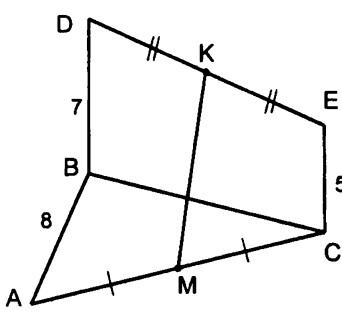
<p>1</p>  <p>Дано: <math>a \parallel b</math>. Доказать: <math>a, b</math> и <math>c</math> лежат в одной плоскости.</p>	<p>2</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – параллелограмм. Точки <math>A, B</math> и <math>D</math> лежат в плоскости <math>\alpha</math>. Доказать: точка <math>C</math> лежит в плоскости <math>\alpha</math>.</p>
<p>3</p>  <p>Дано: прямые <math>a</math> и <math>b</math> – скрещивающиеся. Доказать: прямые <math>c</math> и <math>d</math> – скрещивающиеся.</p>	<p>4</p>  <p>Дано: точка <math>A</math> лежит вне плоскости <math>DNK</math>. Доказать: прямые <math>AD</math> и <math>NK</math> – скрещивающиеся.</p>
<p>5</p>  <p>Дано: <math>b \parallel BC</math>, прямая <math>a</math> не принадлежит плоскости <math>ABC</math>. Доказать: прямые <math>a</math> и <math>b</math> – скрещивающиеся.</p>	<p>6</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – пространственный четырехугольник. <math>AC=16</math> <math>BD=10</math> Найти <math>PEFKP</math></p>
<p>7</p>  <p>Дано: <math>AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1, BB_1=9</math>. Найти <math>CC_1</math></p>	<p>8</p>  <p>Дано: <math>BD \parallel CE</math> <math>KM=10</math> Доказать: точки <math>D</math> и <math>E</math> лежат в плоскости <math>ABC</math>.</p>

Таблица 10.4. Параллельность прямых и плоскостей.

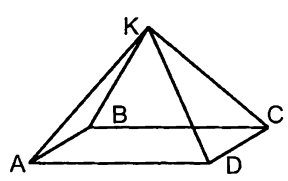
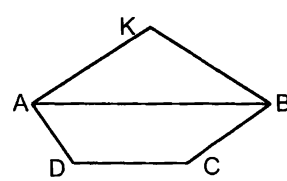
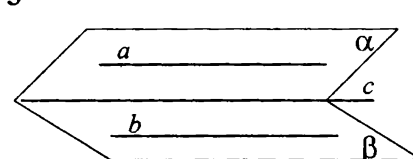
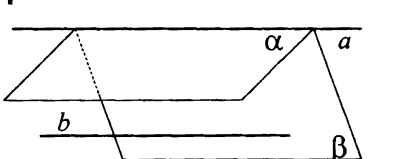
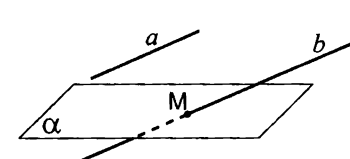
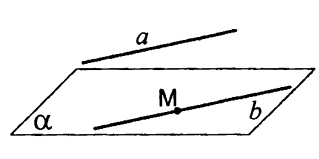
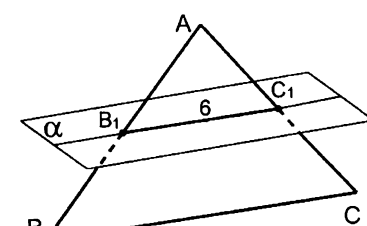
<p>1</p>  <p>Дано: точка <math>K</math> лежит вне плоскости параллелограмма <math>ABCD</math>. Указать пары параллельных прямых и плоскостей.</p>	<p>2</p>  <p>Дано: точка <math>K</math> лежит вне плоскости трапеции <math>ABCD</math>. Доказать: <math>CD \parallel AKB</math>.</p>
<p>3</p>  <p>Дано: плоскости <math>\alpha</math> и <math>\beta</math> пересекаются по прямой <math>c</math>. Прямые <math>a</math> и <math>b</math> принадлежат плоскостям <math>\alpha</math> и <math>\beta</math> соответственно. <math>a \parallel b</math>. Доказать: <math>a \parallel b \parallel c</math>.</p>	<p>4</p>  <p>Дано: плоскости <math>\alpha</math> и <math>\beta</math> пересекаются по прямой <math>a</math>. <math>b \parallel \alpha</math>, <math>b \parallel \beta</math>. Доказать: <math>b \parallel a</math>.</p>
<p>5</p>  <p>Дано: прямая <math>b</math> пересекает плоскость <math>\alpha</math> в точке <math>M</math>. <math>a \parallel b</math>. Доказать: <math>a</math> пересекает <math>\alpha</math>.</p>	<p>6</p>  <p>Дано: <math>a \parallel \alpha</math>, <math>a \parallel b</math>, <math>M</math> – общая точка плоскости <math>\alpha</math> и прямой <math>b</math>. Доказать: <math>b</math> принадлежит <math>\alpha</math>.</p>
<p>7</p>  <p>Дано: плоскость <math>\alpha</math> пересекает стороны <math>AB</math> и <math>AC</math> треугольника <math>ABC</math> в точках <math>B_1</math> и <math>C_1</math> соответственно. <math>B_1C_1 \parallel BC</math>, <math>AC_1 : C_1C = 3:4</math>.</p> <p>Найти <math>BC</math>.</p>	

Таблица 10.5. Признак параллельности плоскостей.

Доказать параллельность плоскостей  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ :

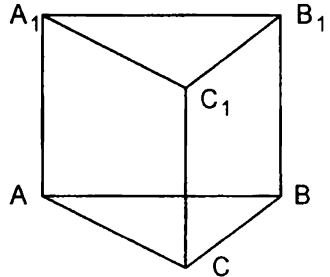
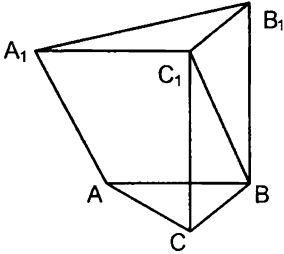
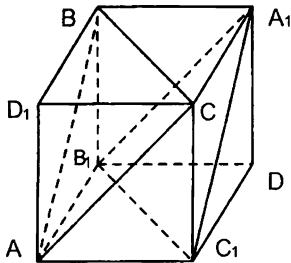
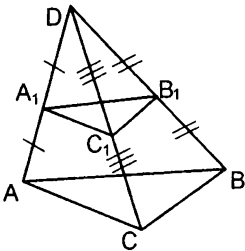
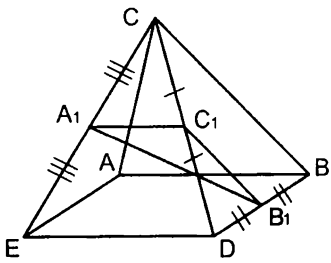
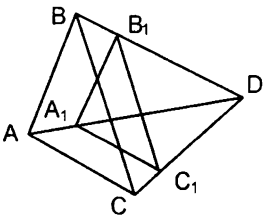
<p><b>1</b></p>  <p>Дано: <math>AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1</math>, <math>AA_1 = BB_1 = CC_1</math></p>	<p><b>2</b></p>  <p>Дано: <math>AA_1C_1B</math> и <math>CC_1B_1B</math> – параллелограммы</p>
<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>AB_1DC_1D_1BA_1C</math> – куб</p>	<p><b>4</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – пространственный четырехугольник</p>
<p><b>5</b></p>  <p>Дано: точка <math>C</math> лежит вне плоскости параллелограмма <math>ABCD</math></p>	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – пространственный четырехугольник.  <math>DA_1 : A_1A = DB_1 : B_1B = DC_1 : C_1C</math></p>

Таблица 10.6. Свойства параллельных плоскостей.

Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны.

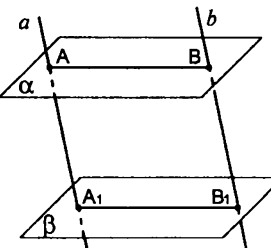
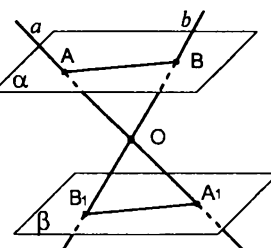
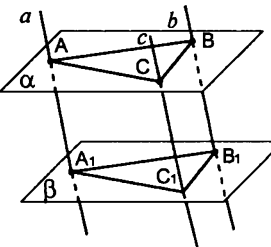
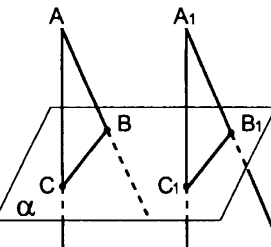
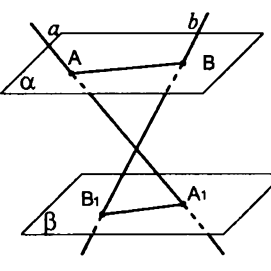
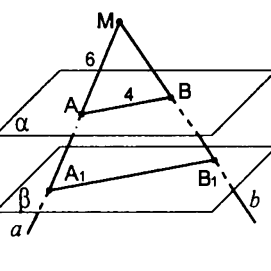
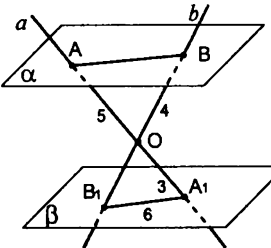
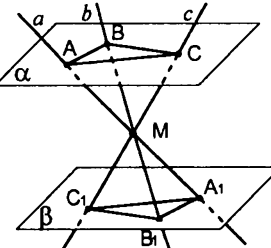
<p><b>1</b></p>  <p>Дано: <math>a \parallel b</math>. Доказать: <math>AB = A_1B_1</math></p>	<p><b>2</b></p>  <p>Дано: прямые <math>a</math> и <math>b</math> пересекаются в точке <math>O</math>. Доказать: <math>AB \parallel A_1B_1</math></p>
<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>a \parallel b \parallel c</math>. Доказать: <math>\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1</math></p>	<p><b>4</b></p>  <p>Дано: <math>AB \parallel A_1B_1</math>, <math>AC \parallel A_1C_1</math>. Доказать: <math>BC \parallel B_1C_1</math></p>
<p><b>5</b></p>  <p>Дано: <math>a</math> и <math>b</math> – скрещивающиеся прямые. Доказать: прямые <math>AB</math> и <math>A_1B_1</math> – скрещивающиеся.</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: прямые <math>a</math> и <math>b</math> пересекаются в точке <math>M</math>. <math>AA_1=3</math>, <math>MB_1=12</math>. Найти: <math>A_1B_1</math>, <math>MB</math> и <math>BB_1</math></p>
<p><b>7</b></p>  <p>Дано: прямые <math>a</math> и <math>b</math> пересекаются в точке <math>O</math>. Найти: <math>AB</math> и <math>OB_1</math></p>	<p><b>8</b></p>  <p>Дано: прямые <math>a</math> и <math>b</math> пересекаются в точке <math>M</math>. Доказать: <math>\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1</math></p>

Таблица 10.7. Изображение пространственных фигур на плоскости.

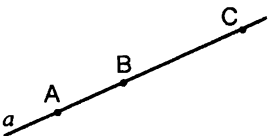
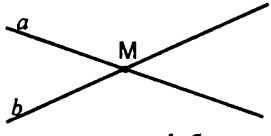
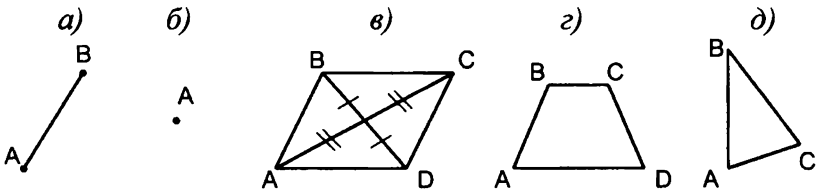
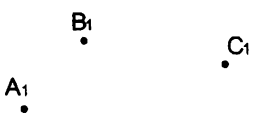
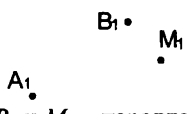
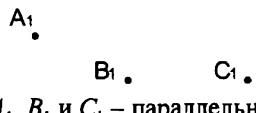

<p>1</p>  <p>Могут ли точки <math>A</math>, <math>B</math> и <math>C</math> быть параллельными проекциями вершин <math>\triangle ABC</math>?</p>	<p>2</p>  <p>Могут ли прямые <math>a</math> и <math>b</math> быть параллельными проекциями параллельных прямых?</p>
<p>3</p>  <p>Какая из фигур может быть параллельной проекцией квадрата?</p>	
<p>4</p>  <p>Точки <math>A_1</math>, <math>B_1</math> и <math>C_1</math> – параллельные проекции вершин параллелограмма <math>ABCD</math>. Построить проекцию вершины <math>D</math>.</p>	<p>5</p>  <p>Точки <math>A_1</math>, <math>B_1</math> и <math>M_1</math> – параллельные проекции вершин <math>A</math> и <math>B</math> и точки пересечения медиан <math>\triangle ABC</math> соответственно. Построить проекцию вершины <math>C</math>.</p>
<p>6</p>  <p>Точки <math>A_1</math>, <math>B_1</math> и <math>C_1</math> – параллельные проекции вершин правильного шестиугольника <math>ABCDEF</math>. Построить проекцию шестиугольника.</p>	<p>7</p>  <p>Четырехугольник <math>ABCD</math> – параллельная проекция прямоугольника. Построить проекции перпендикуляров, проведенных из точки <math>M</math> к сторонам прямоугольника.</p>



Таблица 10.8. Изображение пространственных фигур на плоскости.

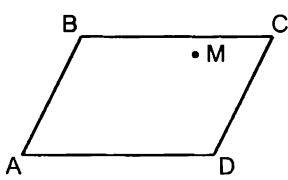
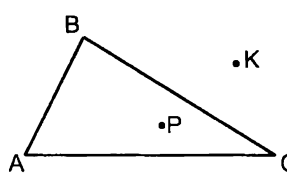
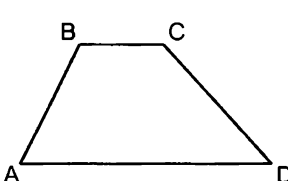
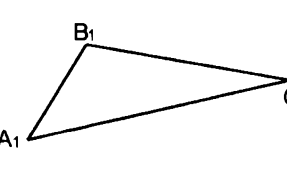
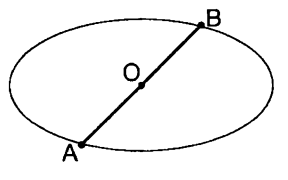
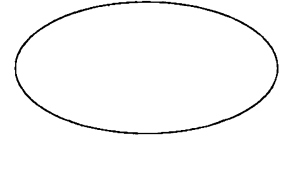
<p>1</p>  <p>Четырехугольник <math>ABCD</math> – параллельная проекция ромба. Построить проекцию перпендикуляра, проведенного из точки <math>M</math> к диагонали <math>BD</math>.</p>	<p>2</p>  <p><math>\triangle ABC</math> – параллельная проекция равностороннего треугольника. Построить проекции прямых, перпендикулярных сторонам треугольника, проходящих через точки <math>P</math> и <math>K</math>.</p>
<p>3</p>  <p>Четырехугольник <math>ABCD</math> – параллельная проекция равнобокой трапеции. Построить проекцию высоты трапеции, проведенной из вершины <math>B</math>.</p>	<p>4</p>  <p><math>\triangle A_1B_1C_1</math> – параллельная проекция <math>\triangle ABC</math>, <math>AC = 2AB</math>. Построить проекцию биссектрисы <math>\angle A</math>.</p>
<p>5</p>  <p>Дана параллельная проекция окружности. <math>AB</math> – проекция ее диаметра. Построить проекцию диаметра, перпендикулярного <math>AB</math>.</p>	<p>6</p>  <p>Дана параллельная проекция окружности. Построить проекцию центра окружности.</p>

Таблица 10.9. Перпендикулярность прямой и плоскости.

Точка  $M$  лежит вне плоскости  $ABC$ .

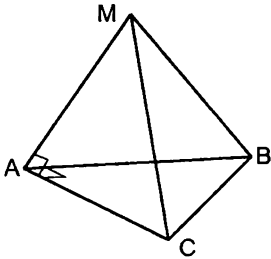
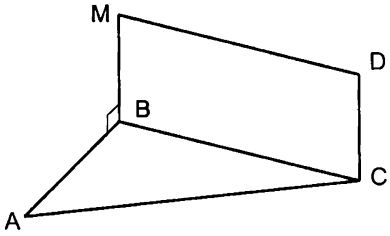
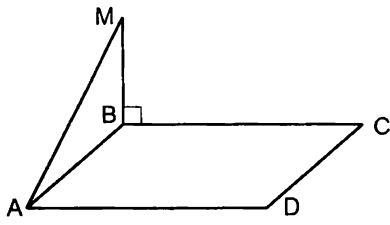
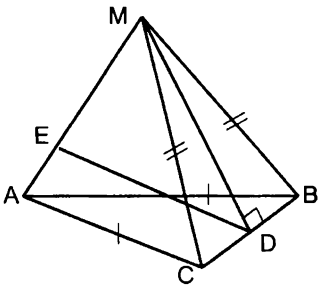
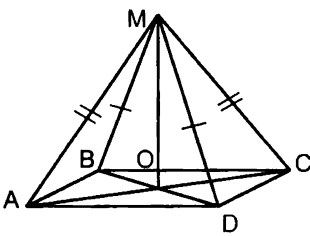
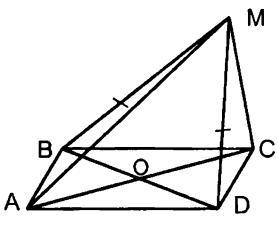
<p>1</p>  <p>Доказать: прямая <math>AB</math> перпендикулярна плоскости <math>AMC</math>.</p>	<p>2</p>  <p>Дано: <math>BMDC</math> – прямоугольник. Доказать: прямая <math>CD</math> перпендикулярна плоскости <math>ABC</math>.</p>
<p>3</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – прямоугольник. Доказать: <math>AD \perp AM</math>.</p>	<p>4</p>  <p>Доказать: <math>BC \perp DE</math>.</p>
<p>5</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – параллелограмм. Доказать: прямая <math>MO</math> перпендикулярна плоскости <math>ABC</math>.</p>	<p>6</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – ромб. Доказать: прямая <math>BD</math> перпендикулярна плоскости <math>AMC</math>.</p>

Таблица 10.10. Перпендикулярность прямой и плоскости.

Прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .

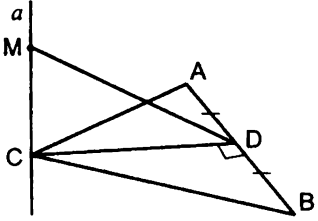
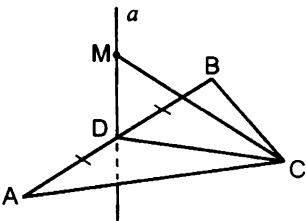
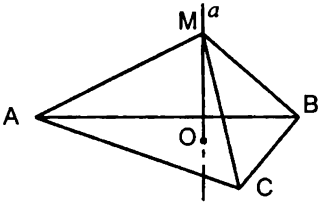
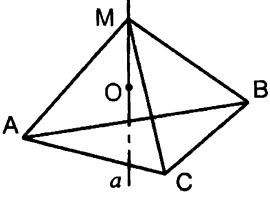
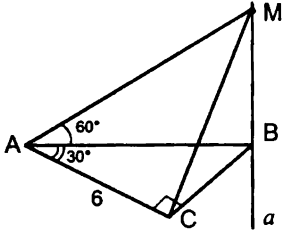
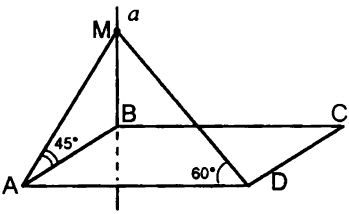
<p><b>1</b></p>  <p>Дано: <math>\angle ACB=90^\circ</math>, <math>AC=4</math>, <math>MD=3</math>. Найти <math>MC</math>.</p>	<p><b>2</b></p>  <p>Дано: <math>\triangle ABC</math> – равносторонний. <math>AB = 2\sqrt{3}</math>. <math>MD=4</math>. Найти <math>MC</math>.</p>
<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>\triangle ABC</math> – равносторонний. <math>AB = 4\sqrt{3}</math>. <math>O</math> – центр окружности, описанной около <math>\triangle ABC</math>. <math>MO=3</math>. Найти <math>MB</math>.</p>	<p><b>4</b></p>  <p>Дано: <math>O</math> – центр окружности, опи- санной около <math>\triangle ABC</math>. <math>\angle ACB=120^\circ</math>, <math>AB=6</math>, <math>MO=2</math>. Найти <math>MC</math>.</p>
<p><b>5</b></p>  <p>Найти <math>MB</math>.</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – прямоугольник. <math>MD=8</math>. Найти <math>AB</math> и <math>AD</math>.</p>

Таблица 10.11. Перпендикуляр и наклонная.

$AA_1$  – перпендикуляр к плоскости  $\alpha$ ,  $AB$  и  $AC$  – наклонные.

Найти  $x$  и  $y$ .

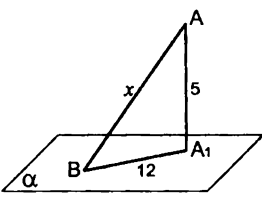
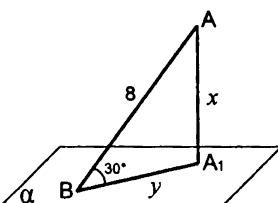
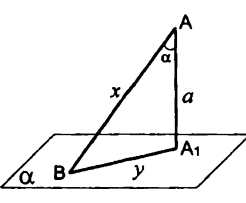
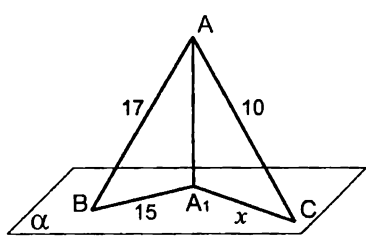
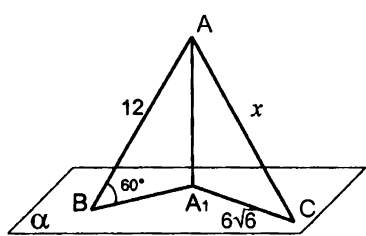
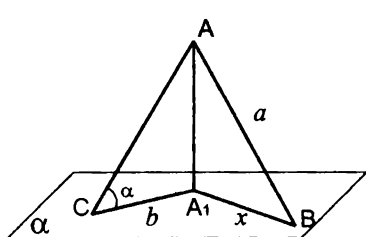
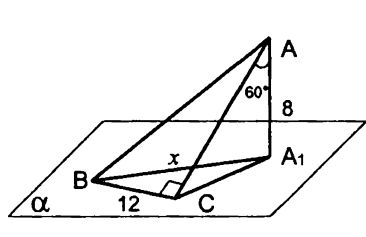
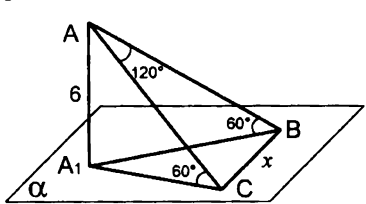
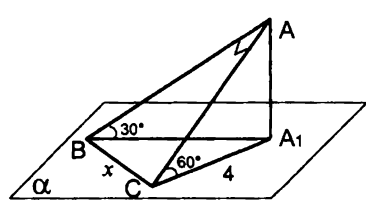
<p>1</p> 	<p>2</p> 	<p>3</p> 
<p>4</p> 	<p>5</p> 	
<p>6</p> 	<p>7</p> 	
<p>8</p> 	<p>9</p> 	

Таблица 10.12. Перпендикуляр и наклонная.

$AA_1$  - перпендикуляр к плоскости  $\alpha$ ,  $AB$  и  $AC$  - наклонные.

Найти  $x$  и  $y$ .

<p><b>1</b></p>	<p><b>2</b></p> <p>Дано: <math>BD = 5, AD = 15</math></p>
<p><b>3</b></p>	<p><b>4</b></p> <p>Дано: <math>AC = 10</math></p>
<p><b>5</b></p>	<p><b>6</b></p>
<p><b>7</b></p>	<p><b>8</b></p>

Таблица 10.13. Теорема о трех перпендикулярах.

Прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .

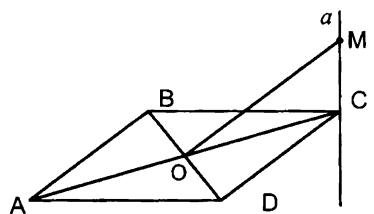
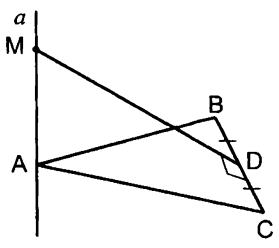
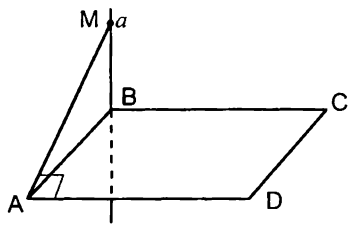
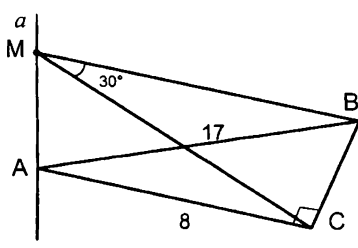
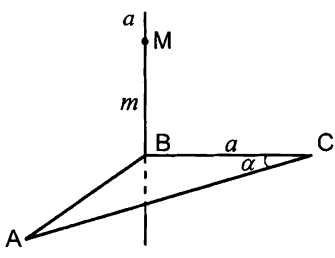
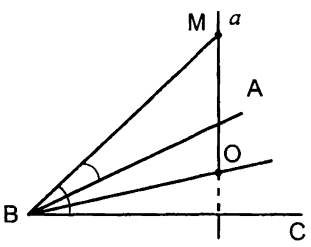
<p><b>1</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – ромб. Доказать: <math>MO \perp BD</math>.</p>	<p><b>2</b></p>  <p>Доказать: <math>AB = AC</math>.</p>
<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – параллелограмм. Доказать: <math>ABCD</math> – прямоугольник.</p>	<p><b>4</b></p>  <p>Найти <math>MB</math>.</p>
<p><b>5</b></p>  <p>Найти расстояние от точки <math>M</math> до прямой <math>AC</math>.</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Доказать: <math>BO</math> – биссектриса угла <math>ABC</math>.</p>

Таблица 10.14. Теорема о трех перпендикулярах.

Прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .

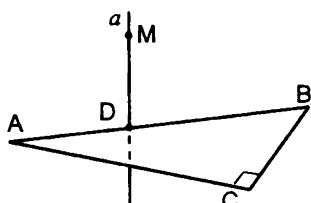
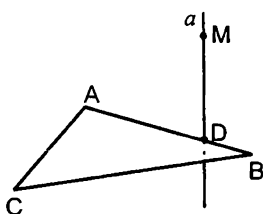
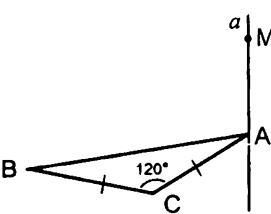
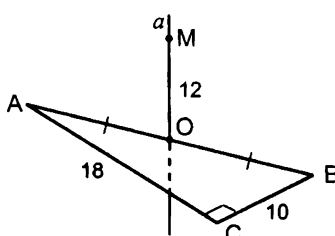
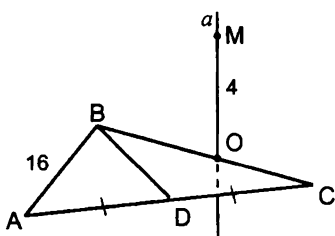
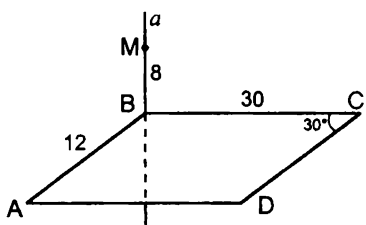
<p>1</p>  <p>Построить перпендикуляры из точки <math>M</math> к прямым <math>AC</math> и <math>BC</math>.</p>	<p>2</p>  <p>Дано: <math>\triangle ABC</math> – правильный. Построить перпендикуляры из точки <math>M</math> к прямым <math>AC</math> и <math>BC</math>.</p>
<p>3</p>  <p>Построить перпендикуляр из точки <math>M</math> к прямой <math>BC</math>.</p>	<p>4</p>  <p>Найти расстояние от точки <math>M</math> до прямых <math>AC</math> и <math>BC</math>.</p>
<p>5</p>  <p>Дано: <math>\triangle ABC</math> – правильный. Найти расстояние от точки <math>M</math> до прямых <math>AB</math> и <math>BD</math>.</p>	<p>6</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – параллелограмм. Найти расстояние от точки <math>M</math> до прямых <math>AD</math> и <math>DC</math>.</p>

Таблица 10.15. Теорема о трех перпендикулярах.

Прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .

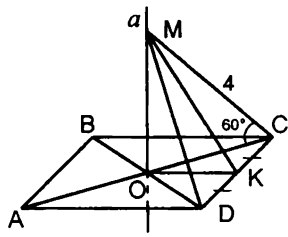
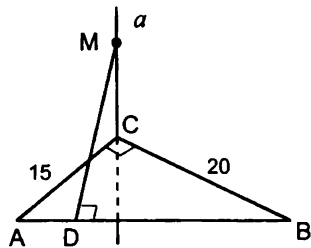
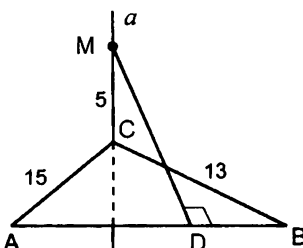
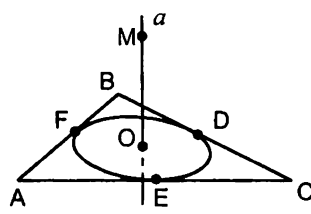
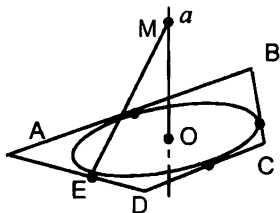
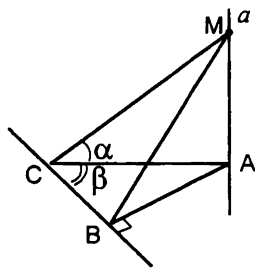
<p>1</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – квадрат. Найти <math>MK</math>.</p>	<p>2</p>  <p>Дано: <math>MD = 13</math>. Найти <math>MC</math>.</p>
<p>3</p>  <p>Дано: <math>AB = 14</math>. Найти <math>MD</math>.</p>	<p>4</p>  <p>Дано: <math>\triangle ABC</math> – правильный, <math>O</math> – центр окружности, вписанной в <math>\triangle ABC</math>, <math>AB=12</math>, <math>OM=4</math>. Найти расстояние от точки <math>M</math> до прямой <math>BC</math>.</p>
<p>5</p>  <p>Дано: <math>O</math> – центр окружности, вписанной в трапецию <math>ABCD</math>, <math>AD=BC</math>, <math>CD=9</math>, <math>AB=16</math>, <math>ME=10</math>. Найти <math>OM</math>.</p>	<p>6</p>  <p>Найти <math>\angle MCB</math>.</p>



Таблица 10.16. Перпендикулярность плоскостей.

Точка  $M$  лежит вне плоскости  $ABC$ .

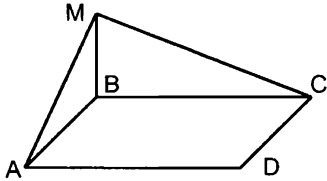
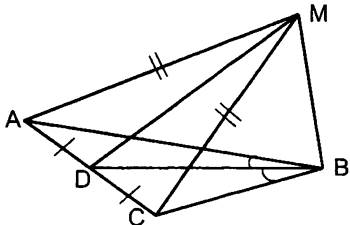
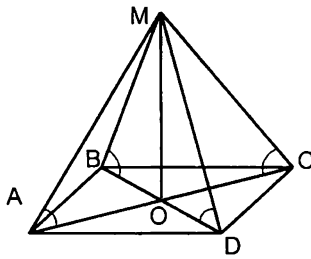
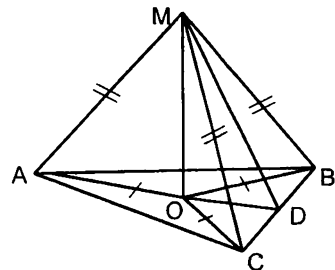
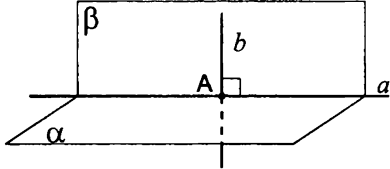
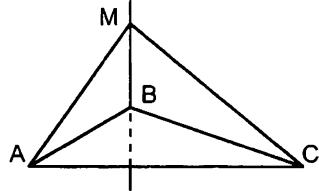
<p>1</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – прямоугольник. Прямая <math>MB</math> перпендикулярна плоскости <math>ABC</math>. Доказать перпендикулярность плоскостей <math>AMB</math> и <math>MCB</math>.</p>	<p>2</p>  <p>Доказать перпендикулярность плоскостей <math>AMC</math> и <math>DMB</math>.</p>
<p>3</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – квадрат. Доказать перпендикулярность плоскостей: 1) <math>AMC</math> и <math>ABC</math>; 2) <math>AMC</math> и <math>BMD</math>.</p>	<p>4</p>  <p>Доказать перпендикулярность плоскостей <math>AMD</math> и <math>ABC</math>.</p>
<p>5</p>  <p>Дано: прямая <math>a</math> – линия пересечения перпендикулярных плоскостей <math>\alpha</math> и <math>\beta</math>. Прямая <math>b</math> принадлежит плоскости <math>\beta</math> и перпендикулярна прямой <math>a</math>. Доказать: <math>b \perp \alpha</math>.</p>	<p>6</p>  <p>Дано: плоскости <math>AMB</math> и <math>BMC</math> перпендикулярны плоскости <math>ABC</math>. Доказать: прямая <math>MB</math> перпендикулярна плоскости <math>ABC</math>.</p>

Таблица 10.17. Перпендикулярность плоскостей.

Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярны.

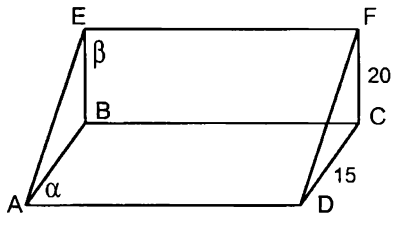
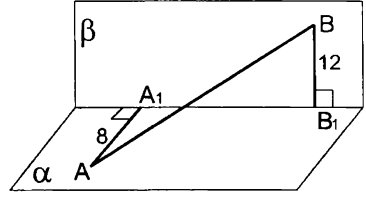
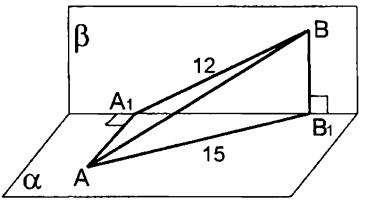
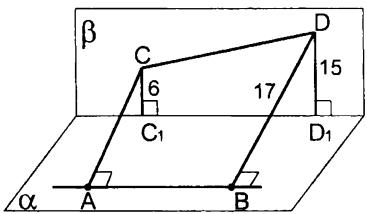
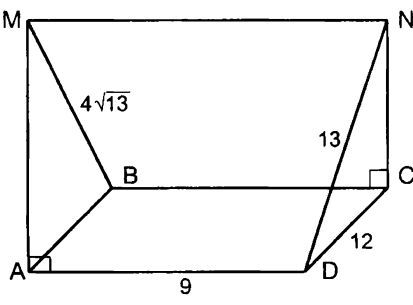
<p>1</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> и <math>BCFE</math> – прямоугольники. Найти расстояние между прямой <math>BC</math> и плоскостью <math>ADF</math>.</p>	<p>2</p>  <p>Дано: точки <math>A</math> и <math>B</math> принадлежат плоскостям <math>\alpha</math> и <math>\beta</math> соответственно. <math>A_1B_1 = 9</math>. Найти <math>AB</math>.</p>
<p>3</p>  <p>Дано: точки <math>A</math> и <math>B</math> принадлежат плоскостям <math>\alpha</math> и <math>\beta</math> соответственно. <math>A_1B_1 = 9</math>. Найти <math>AB</math>.</p>	<p>4</p>  <p>Дано: точки <math>A</math> и <math>B</math> принадлежат плоскости <math>\alpha</math>, а точки <math>C</math> и <math>D</math> – плоскости <math>\beta</math>. <math>AB \parallel C_1D_1</math>. Найти <math>AC</math>.</p>
<p>5</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – прямоугольник. Плоскости <math>AMB</math> и <math>DNC</math> перпендикулярны плоскости <math>ABC</math>. Найти <math>MN</math>.</p>	

Таблица 10.18. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . Найти расстояние между прямыми  $a$  и  $AC$  (рис. 1-3).

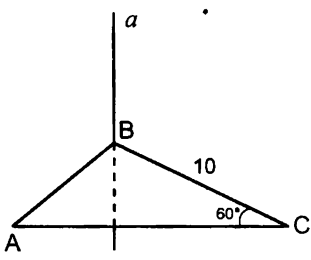
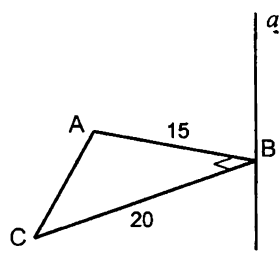
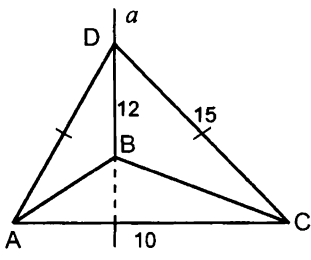
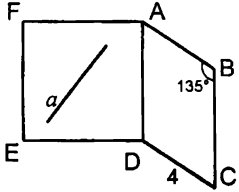
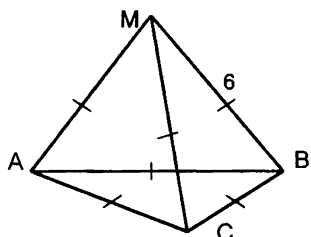
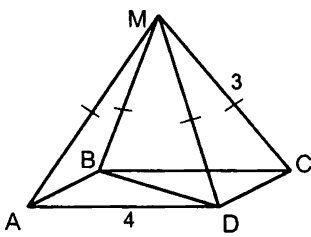
<p>1</p> 	<p>2</p> 
<p>3</p> 	<p>4</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – параллелограмм. Плоскости <math>ABC</math> и <math>ADE</math> перпендикулярны. Прямая <math>a</math> принадлежит плоскости <math>ADE</math>. Найти расстояние между прямыми <math>a</math> и <math>BC</math></p>
<p>5</p>  <p>Дано: точка <math>M</math> лежит вне плоскости <math>ABC</math>. Найти расстояние между прямыми <math>AC</math> и <math>BM</math>.</p>	<p>6</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – квадрат. Точка <math>M</math> лежит вне плоскости <math>ABC</math>. Найти расстояние между прямыми <math>AM</math> и <math>BD</math>.</p>



Таблица 10.20. Угол между скрещивающимися прямыми.

Прямая  $MB$  перпендикулярна плоскости  $ABC$  (рис. 1-3, 5, 6).

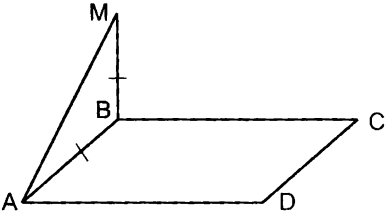
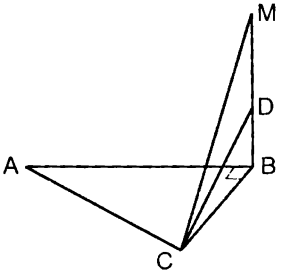
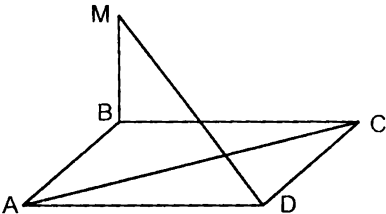
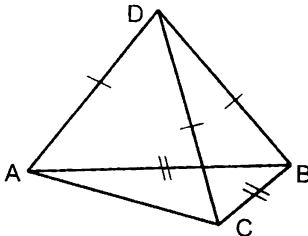
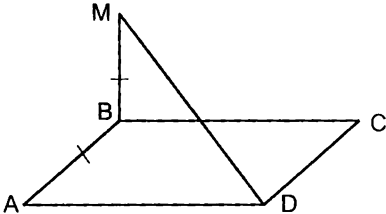
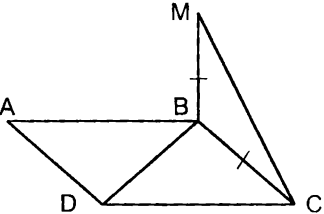
<p><b>1</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – прямоугольник. Найти угол между прямыми: 1) <math>MB</math> и <math>AD</math>; 2) <math>AM</math> и <math>CD</math>; 3) <math>AM</math> и <math>BC</math>.</p>	<p><b>2</b></p>  <p>Найти угол между прямыми <math>AB</math> и <math>CD</math>.</p>
<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – ромб. Найти угол между прямыми <math>MD</math> и <math>AC</math>.</p>	<p><b>4</b></p>  <p>Дано: точка <math>D</math> лежит вне плоскости <math>ABC</math>. Найти угол между прямыми <math>AC</math> и <math>BD</math>.</p>
<p><b>5</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – квадрат. Найти угол между прямыми <math>MD</math> и <math>BC</math>.</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – квадрат. Найти угол между прямыми <math>CM</math> и <math>BD</math>.</p>

Таблица 10.21. Угол между прямой и плоскостью.

Прямая  $MA$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .  
Найти угол между прямой  $MB$  и плоскостью  $ABC$  (рис. 3-6).

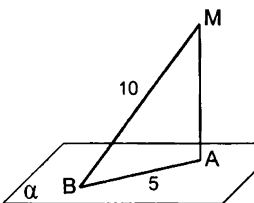
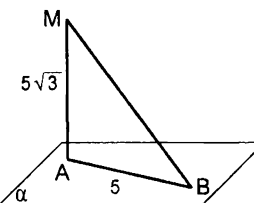
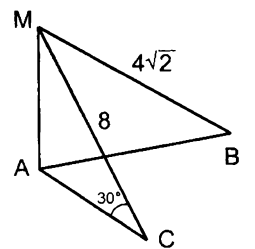
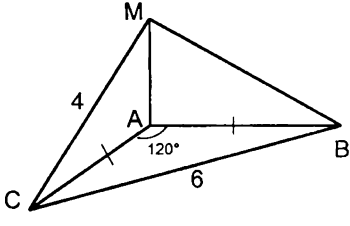
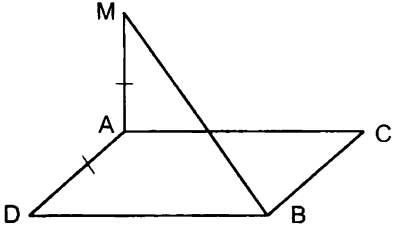
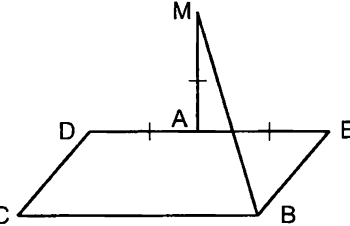
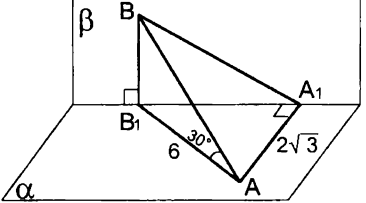
<p>1</p>  <p>Дано: прямая <math>MA</math> перпендикулярна плоскости <math>\alpha</math>. Найти угол между прямой <math>MB</math> и плоскостью <math>\alpha</math>.</p>	<p>2</p> 	<p>3</p> 
<p>4</p> 	<p>5</p>  <p>Дано: <math>ACBD</math> – квадрат.</p>	
<p>6</p>  <p>Дано: <math>BCDE</math> – квадрат.</p>	<p>7</p>  <p>Дано: плоскости <math>\alpha</math> и <math>\beta</math> перпендикулярны. Найти угол между прямой <math>AB</math> и плоскостью <math>\beta</math>.</p>	

Таблица 10.22. Угол между плоскостями.

Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$ .

Найти угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

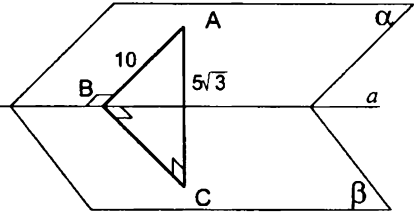
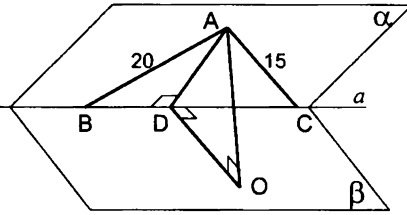
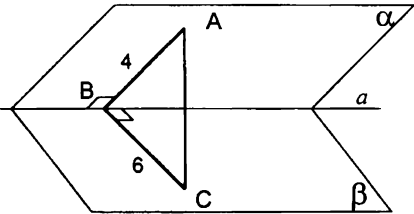
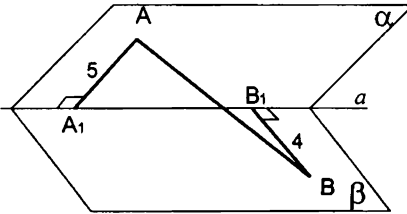
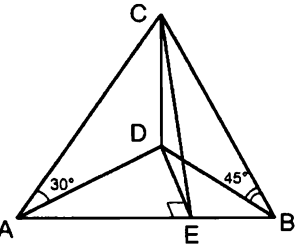
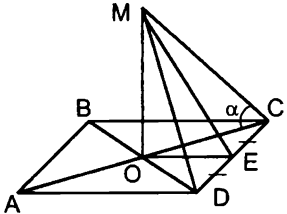
<p><b>1</b></p> 	<p><b>2</b></p>  <p>Дано: <math>\angle BAC = 90^\circ</math>, <math>AO = 6</math>.</p>
<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>AC = 2\sqrt{7}</math>.</p>	<p><b>4</b></p>  <p>Дано: <math>AB = 11</math>, <math>A_1B_1 = 10</math>.</p>
<p><b>5</b></p>  <p>Дано: прямая <math>CD</math> перпендикулярна плоскости <math>ADB</math>, <math>\angle ADB = 90^\circ</math>. Найти угол между плоскостями <math>ACB</math> и <math>ADC</math>.</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – квадрат. Прямая <math>MO</math> перпендикулярна плоскости <math>ABC</math>. Найти угол между плоскостями <math>MDC</math> и <math>ABC</math>.</p>

Таблица 10.23. Площадь ортогональной проекции многоугольника.

Прямая  $MO$  перпендикулярна плоскости  $AOB$  (рис. 1-4).

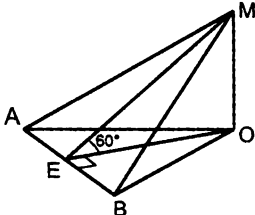
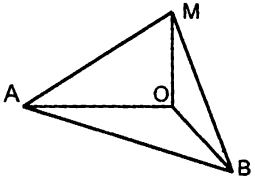
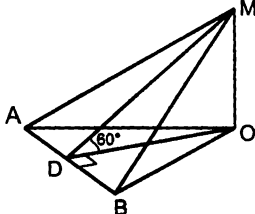
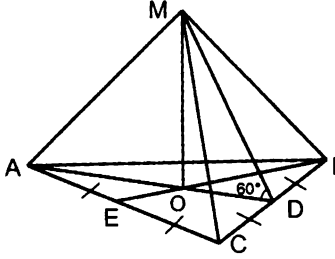
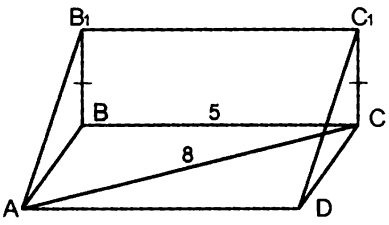
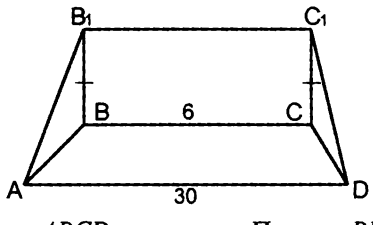
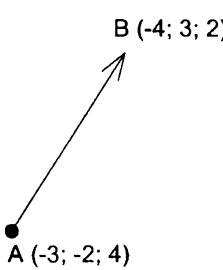
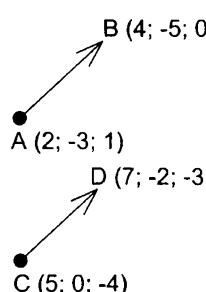
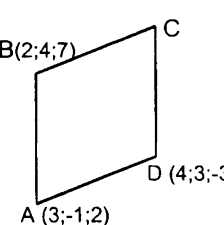
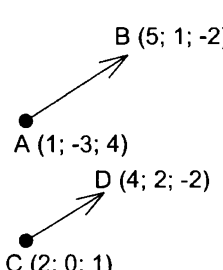
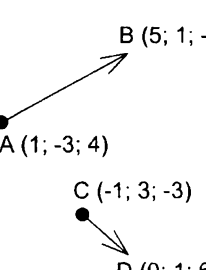
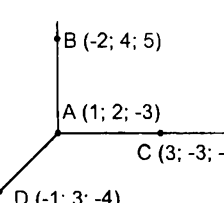
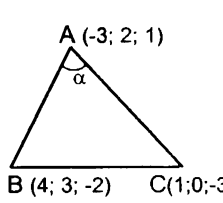
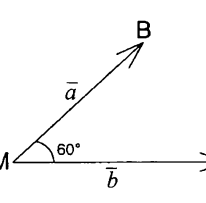
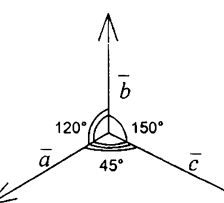
<p>1</p>  <p>Дано: <math>S_{AMB} = 8</math> Найти <math>S_{AOB}</math>.</p>	<p>2</p>  <p>Дано: <math>S_{AOB} = 8, S_{AMB} = 8\sqrt{2}</math>. Найти угол между плоскостями <math>AMB</math> и <math>AOB</math>.</p>
<p>3</p>  <p>Дано: <math>AB = 14, OB = 15, AO = 13</math>. Найти <math>S_{AMB}</math>.</p>	<p>4</p>  <p>Дано: <math>\triangle ABC</math> – равносторонний. <math>S_{AMC} = Q</math>. Найти <math>S_{ABC}</math></p>
<p>5</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – ромб. Прямые <math>BB_1</math> и <math>CC_1</math> перпендикулярны плоскости <math>ABC</math>. <math>S_{AB_1C_1D} = 24\sqrt{2}</math>. Найти угол между плоскостями <math>ABC</math> и <math>AB_1C_1</math>.</p>	<p>6</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – трапеция. Прямые <math>BB_1</math> и <math>CC_1</math> перпендикулярны плоскости <math>ABC</math>. <math>AB = CD = 15</math>. <math>S_{AB_1C_1D} = 108\sqrt{3}</math>. Найти угол между плоскостями <math>ABC</math> и <math>AB_1C_1</math>.</p>



Таблица 10.24. Векторы в пространстве.

<p><b>1</b></p>  <p>Найти <math> \overline{AB} </math>.</p>	<p><b>2</b></p>  <p>Равны ли векторы <math>\overline{AB}</math> и <math>\overline{CD}</math>?</p>	<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – параллелограмм. Найти координаты вершины <math>C</math>.</p>
<p><b>4</b></p>  <p>Коллинеарны ли векторы <math>\overline{AB}</math> и <math>\overline{CD}</math>?</p>	<p><b>5</b></p>  <p>Перпендикулярны ли векторы <math>\overline{AB}</math> и <math>\overline{CD}</math>?</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Доказать: прямая <math>AB</math> перпендикулярна плоскости <math>ADC</math>.</p>
<p><b>7</b></p>  <p>Найти <math>\cos \alpha</math></p>	<p><b>8</b></p>  <p>Дано: <math> \overline{a}  = 1,  \overline{b}  = 2</math>. Найти: 1) <math> \overline{a} + \overline{b} </math> 2) <math> \overline{a} - \overline{b} </math> 3) <math> 2\overline{a} - 3\overline{b} </math></p>	<p><b>9</b></p>  <p>Дано: <math> \overline{a}  = 2,  \overline{b}  = 3,  \overline{c}  = 1</math>. Найти <math>(\overline{a} + \overline{c})(\overline{b} - \overline{c})</math></p>

## Стереометрия. 11 класс.

Таблица 11.1. Двугранный угол. Трехгранный угол.

$MN$  - ребро двугранного угла. Точки  $A$  и  $B$  лежат в разных гранях двугранного угла (рис. 1-4).  $(abc)$  - трехгранный угол (рис. 5, 6).

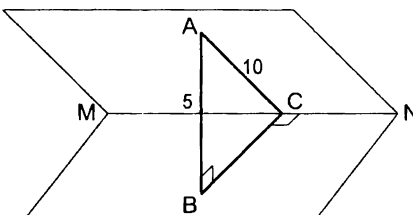
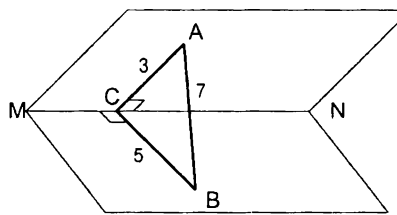
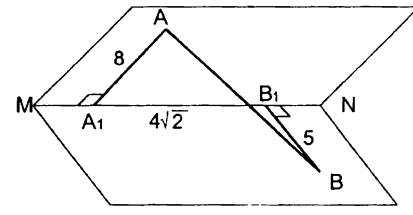
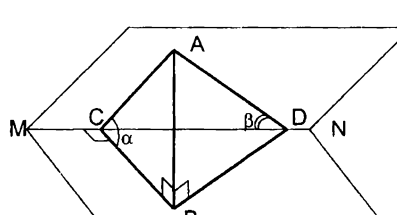
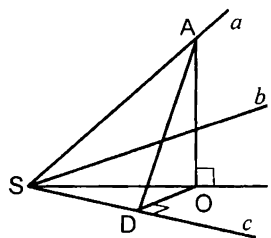
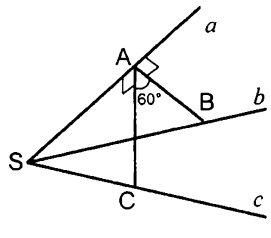
<p><b>1</b></p> 	<p><b>2</b></p> 
<p>Найти величину двугранного угла.</p>	
<p><b>3</b></p>  <p>Дано: величина двугранного угла равна <math>60^\circ</math>. Найти <math>AB</math>.</p>	<p><b>4</b></p>  <p>Найти <math>\angle ADB</math>.</p>
<p><b>5</b></p>  <p>Дано: <math>\angle(ab) = \angle(ac) = \angle(bc) = 60^\circ</math>. Найти величину двугранного угла при ребре <math>c</math>.</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: <math>\angle(ab) = \angle(ac) = 45^\circ</math>. Найти <math>\angle(bc)</math>.</p>

Таблица 11.2. Прямая призма.

$A_1A_2\dots A_nA_1'A_2'\dots A_n'$  – прямая призма.

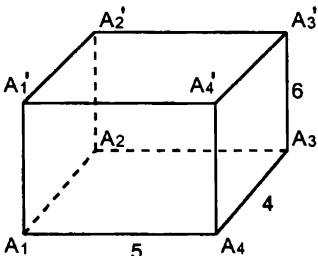
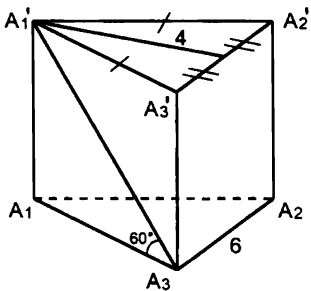
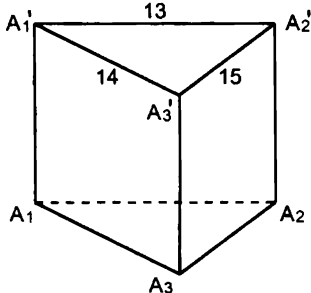
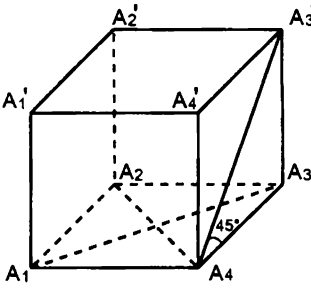
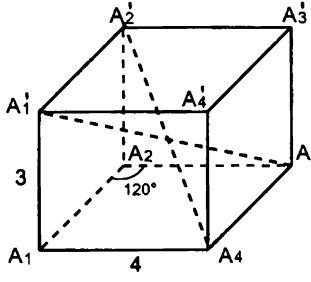
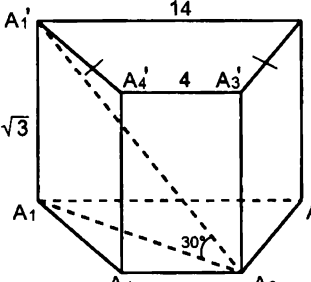
<p><b>1</b></p>  <p>Дано: <math>A_1A_2A_3A_4</math> – прямоугольник. Найти: 1) <math>S_{бок}</math>; 2) <math>S_{полн}</math>.</p>	<p><b>2</b></p>  <p>Найти: 1) <math>S_{бок}</math>; 2) <math>S_{полн}</math>.</p>
<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>S_{полн.} = 378</math>. Найти <math>A_1A_1'</math>.</p>	<p><b>4</b></p>  <p>Дано: <math>A_1A_2A_3A_4</math> – ромб. <math>A_1A_3 = 24</math>, <math>A_2A_4 = 10</math>. Найти <math>S_{полн}</math>.</p>
<p><b>5</b></p>  <p>Дано: <math>A_1A_2A_3A_4</math> – ромб. Найти: <math>A_1A_3</math>, <math>A_2A_4</math>.</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: <math>A_1A_2A_3A_4</math> – трапеция. Найти <math>S_{полн}</math>.</p>

Таблица 11.3. Правильная призма.

$A_1 A_2 \dots A_n A'_1 A'_2 \dots A'_n$  – правильная призма.

Найти: 1) площадь боковой поверхности призмы;  
2) площадь полной поверхности призмы.

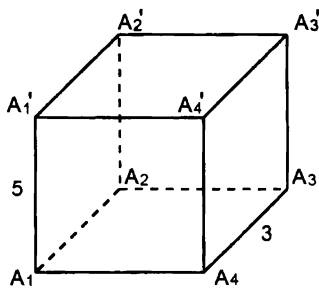
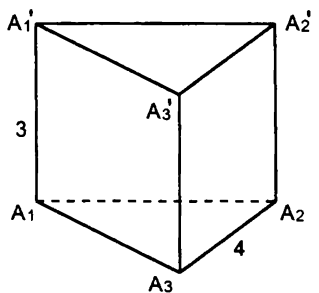
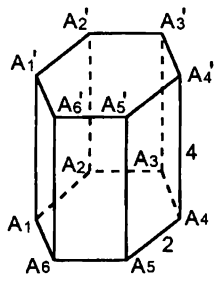
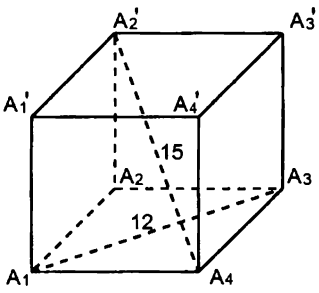
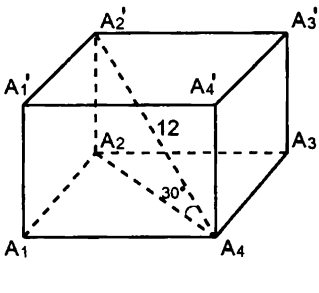
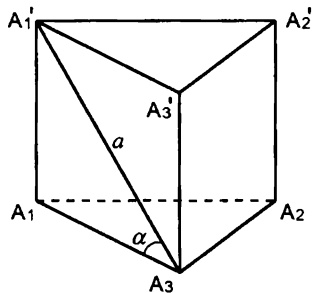
<p>1</p> 	<p>2</p> 
<p>3</p> 	<p>4</p> 
<p>5</p> 	<p>6</p> 

Таблица 11.4. Правильная призма.

$A_1 A_2 \dots A_n A'_1 A'_2 \dots A'_n$  – правильная призма.

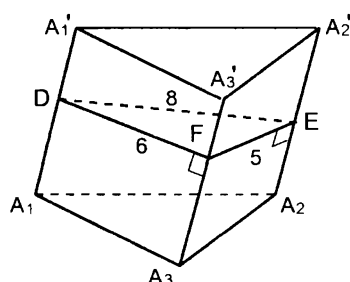
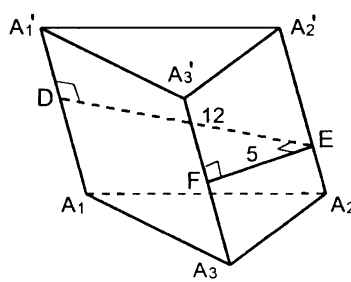
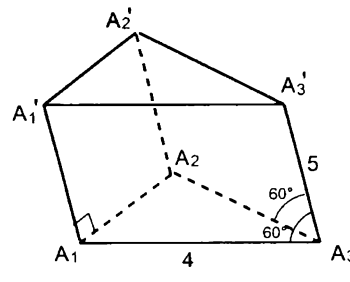
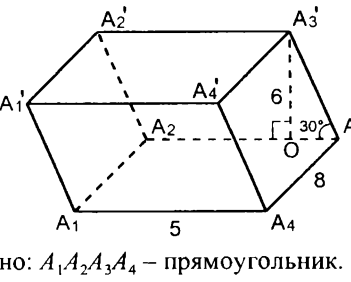
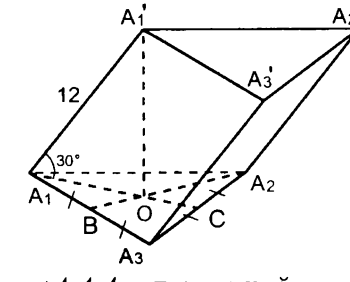
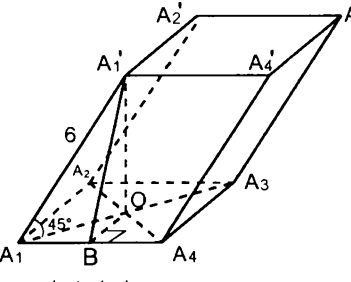
Найти: 1) площадь боковой поверхности призмы;  
2) площадь полной поверхности призмы.

<p>1</p>	<p>2</p>
<p>3</p>	<p>4</p>
<p>5</p>	<p>6</p>

Таблица 11.5. Наклонная призма.

$A_1A_2A_3A_1'A_2'A_3'$  – наклонная призма.

Найти площадь боковой поверхности призмы.

<p><b>1</b></p>  <p>Дано: <math>A_1A_1' = 4</math>.</p>	<p><b>2</b></p>  <p>Дано: <math>A_1A_1' = 10</math>.</p>
<p><b>3 (*)</b></p>  <p>Дано: <math>\triangle A_1A_2A_3</math> – правильный.</p>	<p><b>4</b></p>  <p>Дано: <math>A_1A_2A_3A_4</math> – прямоугольник. <math>A_3'O</math> – высота призмы.</p>
<p><b>5</b></p>  <p>Дано: <math>\triangle A_1A_2A_3</math> – правильный. <math>A_1'O</math> – высота призмы.</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: <math>A_1A_2A_3A_4</math> – квадрат. <math>A_1'O</math> – высота призмы.</p>

(\*) Попробуйте доказать, что в условии задачи можно не указывать, что  $\angle A_1'A_1A_2 = 90^\circ$

Таблица 11.6. Параллелепипед.

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – прямой параллелепипед.

Найти площадь полной поверхности параллелепипеда (рис. 2-6).

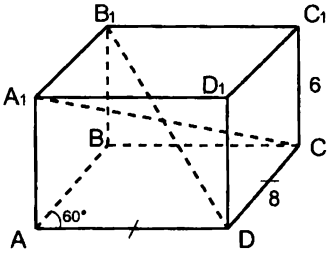
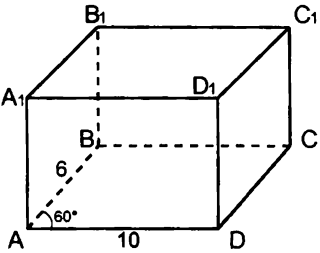
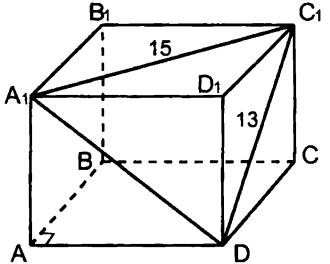
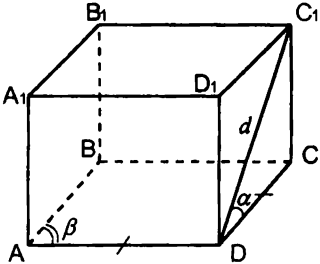
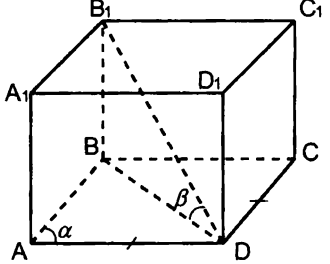
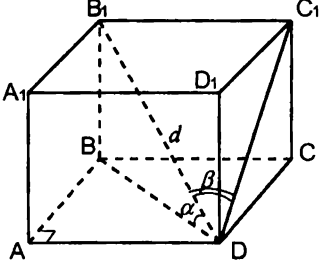
<p>1</p>  <p>Найти: <math>A_1C</math>, <math>B_1D</math>.</p>	<p>2</p>  <p>Дано: <math>AC = B_1D</math>.</p>
<p>3</p>  <p>Дано: <math>A_1D = \sqrt{106}</math></p>	<p>4</p> 
<p>5</p>  <p>Дано: <math>B_1D = d</math>.</p>	<p>6</p> 

Таблица 11.7. Построение сечений призмы.

$A_1 A_2 \dots A_n A'_1 A'_2 \dots A'_n$  – призма. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки  $K, P$  и  $F$ .

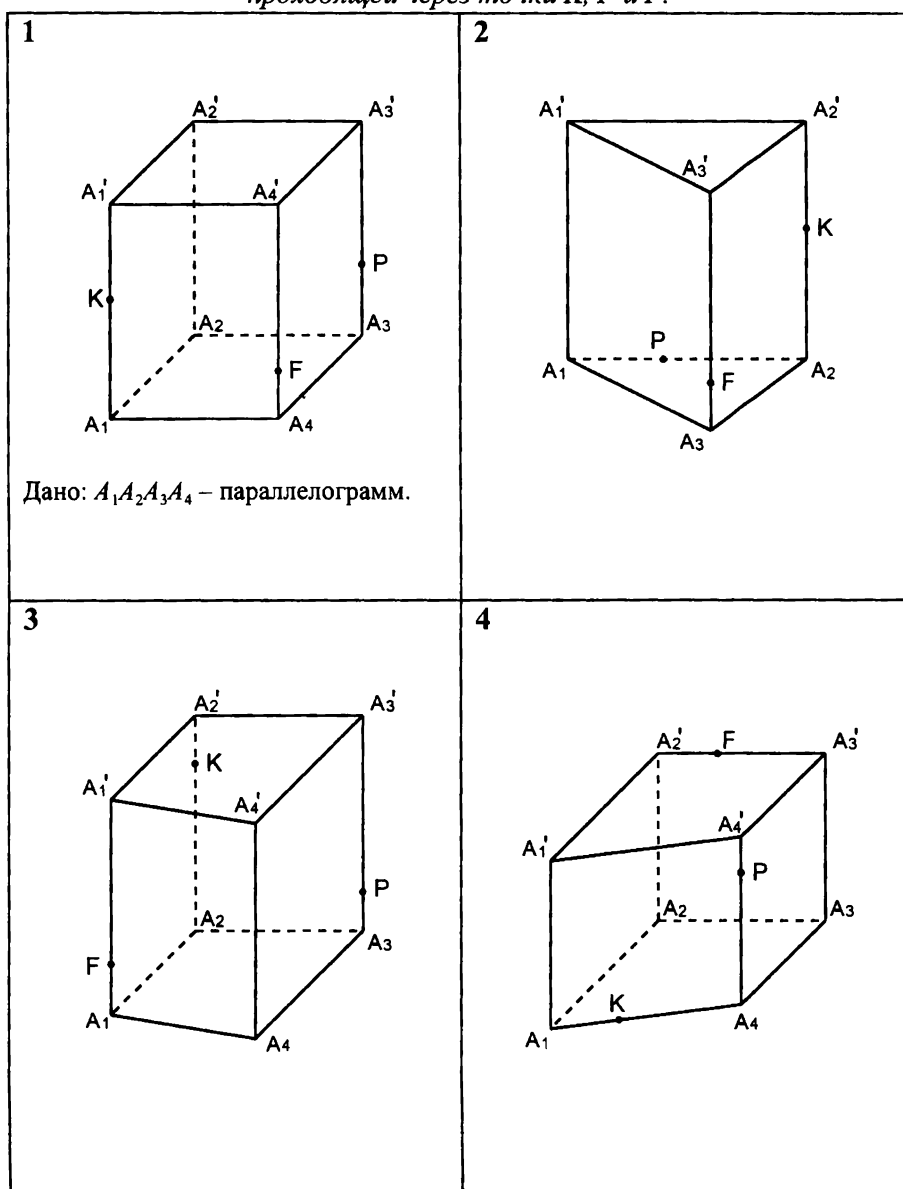




Таблица 11.8. Правильная пирамида.

$SO$  – высота правильной пирамиды.

Найти площадь полной поверхности пирамиды (рис. 2-6).

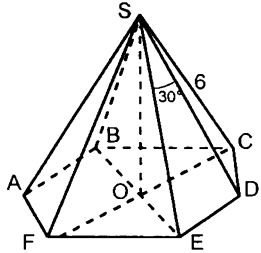
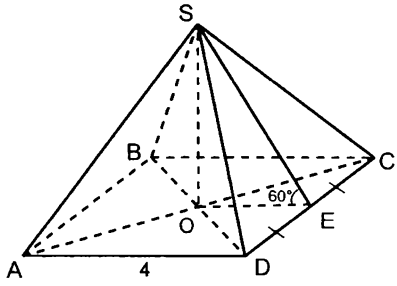
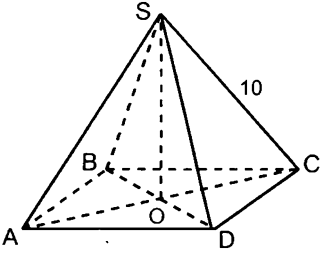
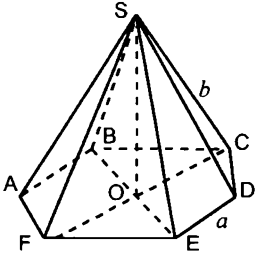
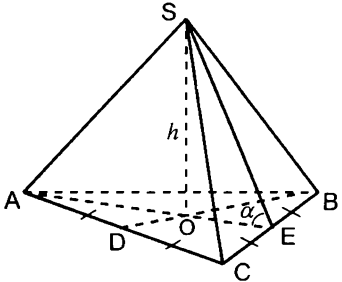
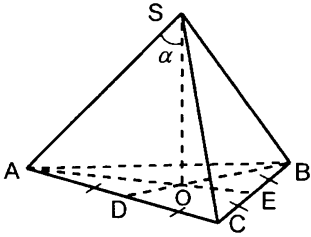
<p><b>1</b></p>  <p>Найти площадь боковой поверхности пирамиды.</p>	<p><b>2</b></p> 
<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>SO = 2\sqrt{7}</math>.</p>	<p><b>4</b></p> 
<p><b>5</b></p> 	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: <math>AB = a</math></p>

Таблица 11.9. Пирамида.

$SO$  – высота пирамиды.

Найти площадь полной поверхности пирамиды (рис. 1, 2, 5, 6).

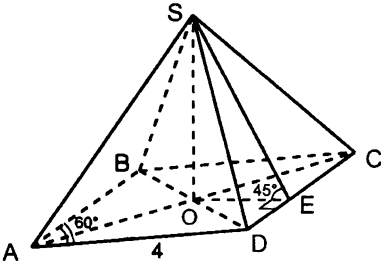
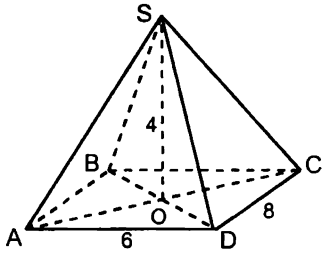
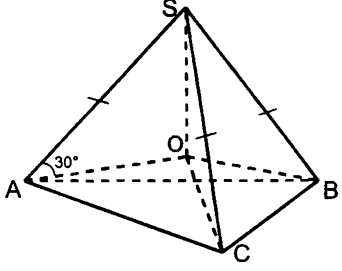
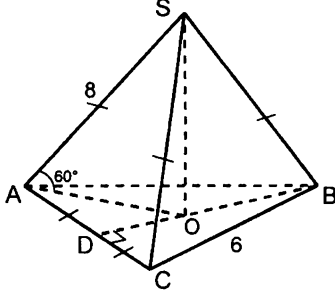
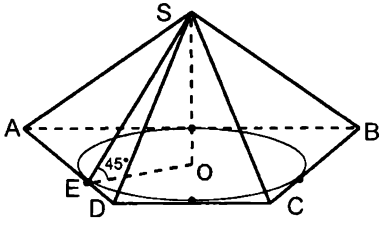
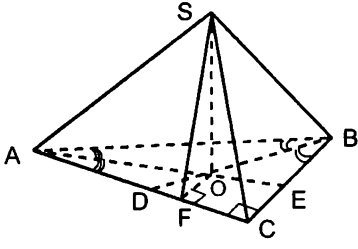
<p>1</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – ромб.</p>	<p>2</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – прямоугольник.</p>
<p>3</p>  <p>Дано: <math>AB = 5\sqrt{3}</math>, <math>\angle ACB = 150^\circ</math>. Найти <math>SO</math>.</p>	<p>4</p>  <p>Найти <math>AC</math>.</p>
<p>5</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – трапеция. <math>AB = 9</math>, <math>CD = 4</math>, <math>AD = BC</math>. <math>O</math> – центр вписанной окружности.</p>	<p>6</p>  <p>Дано: <math>AB = a</math>, <math>\angle BAC = \alpha</math>, <math>\angle SFO = \beta</math></p>

Таблица 11.10. Пирамида.

$SA$  – высота пирамиды.  
Найти площадь полной поверхности пирамиды.

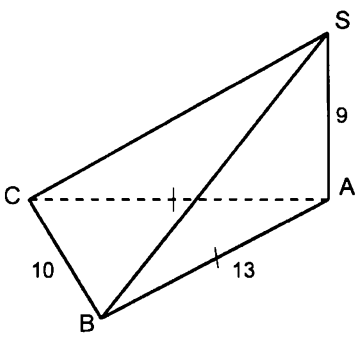
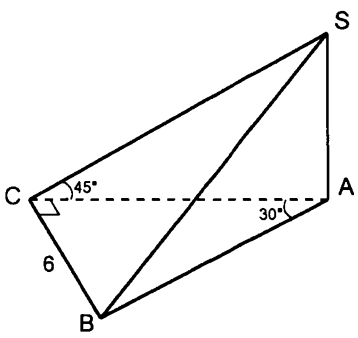
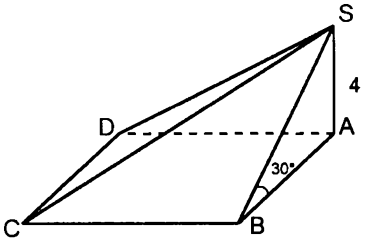
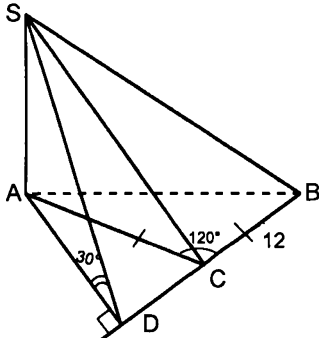
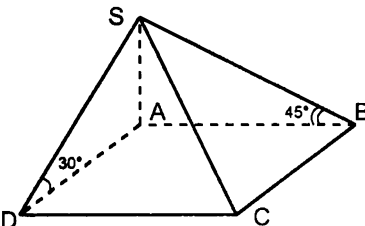
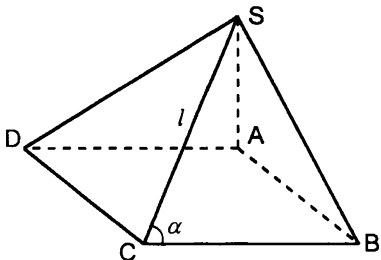
<p><b>1</b></p> 	<p><b>2</b></p> 
<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – квадрат.</p>	<p><b>4</b></p>  <p>Дано: <math>\triangle ABC</math> – основание пирамиды.</p>
<p><b>5</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – прямоугольник. <math>SC = 6\sqrt{5}</math></p>	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – квадрат.</p>

Таблица 11.11. Пирамида. Усеченная пирамида.

$SO$  – высота пирамиды. Найти площадь полной поверхности пирамиды (рис. 1-3).

$A_1 A_2 \dots A_n A'_1 A'_2 \dots A'_n$  – правильная усеченная пирамида (рис. 4-6)

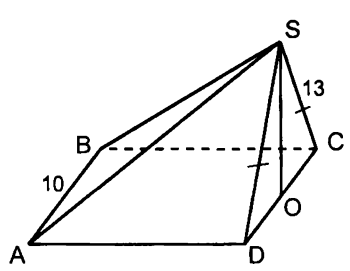
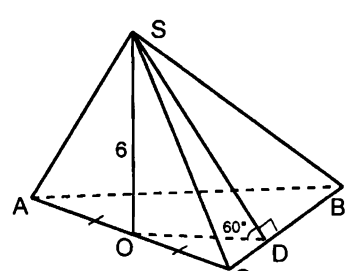
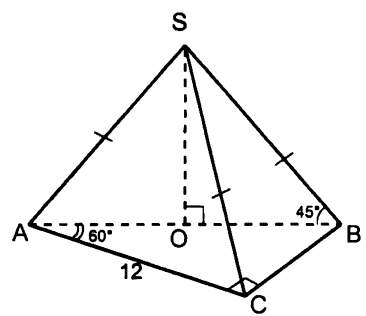
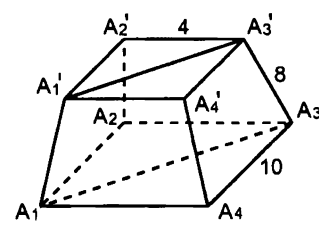
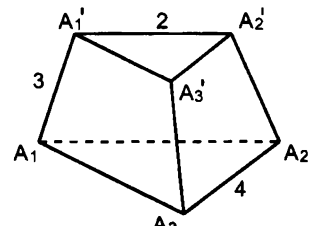
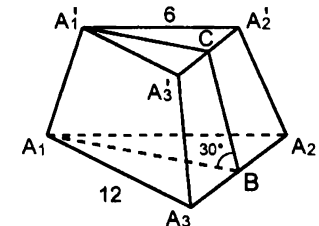
<p>1</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – квадрат.</p>	<p>2</p>  <p>Дано: <math>\triangle ABC</math> – правильный.</p>
<p>3</p> 	<p>4</p>  <p>Найти <math>S_{A_1 A_1' A_3' A_3}</math>.</p>
<p>5</p>  <p>Найти площадь полной поверхности усеченной пирамиды.</p>	<p>6</p> 

Таблица 11.12. Построение сечений пирамиды.

$S$  – вершина пирамиды. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $P$  и  $K$ .

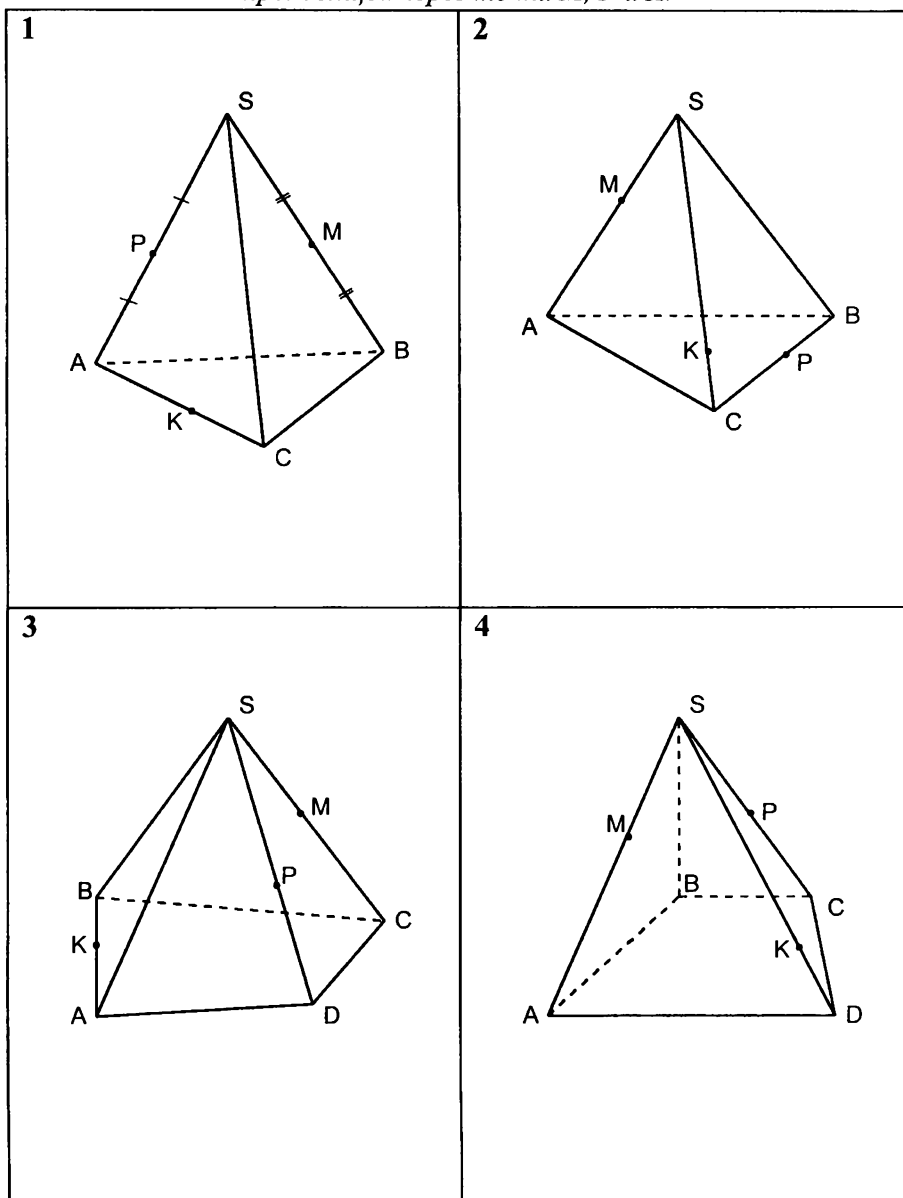


Таблица 11.13. Цилиндр.

$OO_1$  – ось цилиндра,  $AA_1B_1B$  – осевое сечение цилиндра.

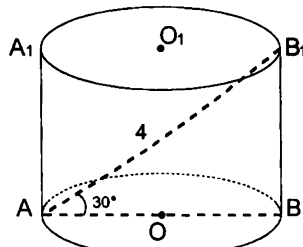
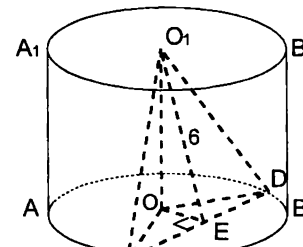
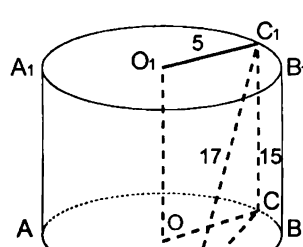
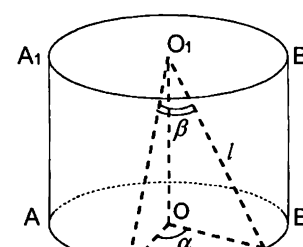
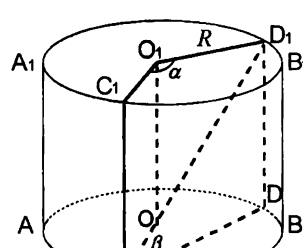
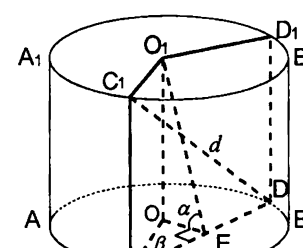
<p>1</p>  <p>Найти высоту и радиус основания цилиндра.</p>	<p>2</p>  <p>Дано: <math>\angle O_1EO = 45^\circ</math>, <math>\angle EOC = 60^\circ</math>. Найти <math>S_{CO_1D}</math>.</p>
<p>3</p>  <p>Найти расстояние между прямыми <math>C_1D</math> и <math>OO_1</math>.</p>	<p>4</p>  <p>Найти высоту и радиус основания цилиндра.</p>
<p>5</p>  <p>Найти <math>S_{CC_1D_1D}</math>.</p>	<p>6</p>  <p>Найти <math>S_{CC_1D_1D}</math>.</p>

Таблица 11.14. Конус.

$SO$  – высота конуса.

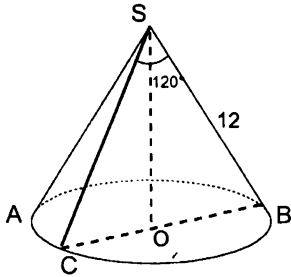
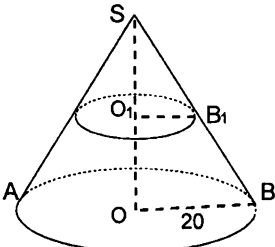
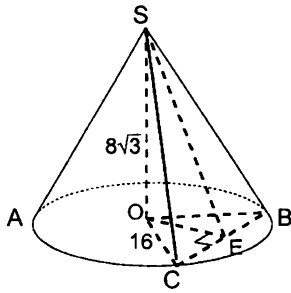
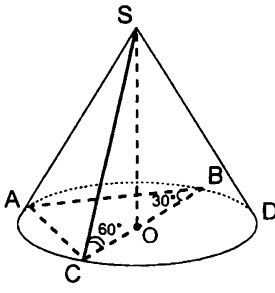
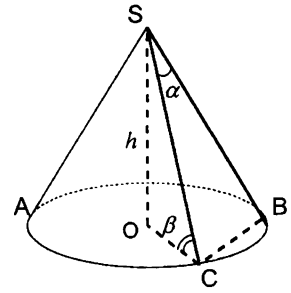
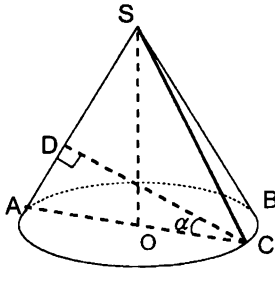
<p>1</p>  <p>Найти <math>SO</math> и <math>OB</math>.</p>	<p>2</p>  <p>Дано: <math>SO = 16</math>, <math>SO_1 = 4</math>. Найти площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через точку <math>O_1</math> параллельно основанию конуса.</p>
<p>3</p>  <p>Дано: <math>\angle COB = 60^\circ</math>. Найти <math>\angle SEO</math>.</p>	<p>4</p>  <p>Дано: <math>AC = 6</math>. Найти <math>S_{ASC}</math>.</p>
<p>5</p>  <p>Найти <math>S_{BSC}</math>.</p>	<p>6</p>  <p>Дано: <math>CD = m</math>. Найти <math>S_{ASC}</math>.</p>

Таблица 11.15. Конус. Усеченный конус.

$SO$  – высота конуса (рис. 1-3),  $O$  и  $O_1$  – центры оснований усеченного конуса (рис. 4-6).

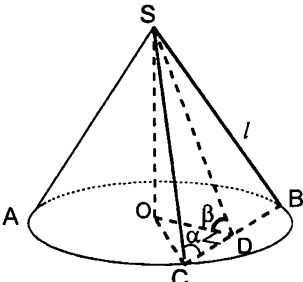
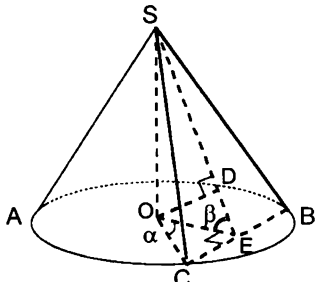
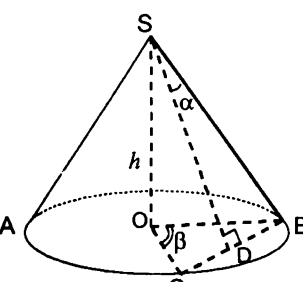
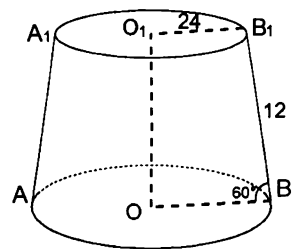
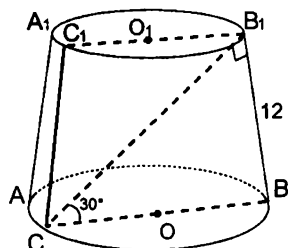
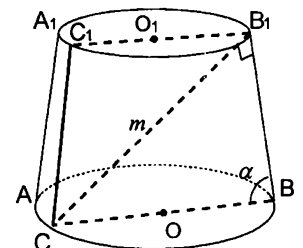
<p><b>1</b></p>  <p>Найти <math>SO</math> и <math>OC</math>.</p>	<p><b>2</b></p>  <p>Дано: <math>OD = a</math>. Найти <math>S_{BSC}</math>.</p>
<p><b>3</b></p>  <p>Найти <math>SB</math>.</p>	<p><b>4</b></p>  <p>Найти <math>OB</math> и <math>OO_1</math>.</p>
<p><b>5</b></p>  <p>Найти <math>SCC_1B_1B</math>.</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Найти <math>SCC_1B_1B</math>.</p>



Таблица 11.16. Шар.

$O$  – центр шара,  $O_1$  – центр круга – сечения шара плоскостью.

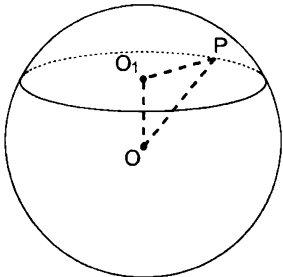
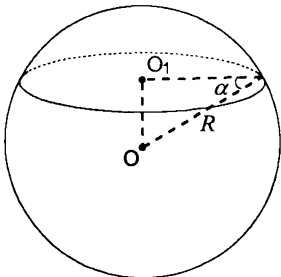
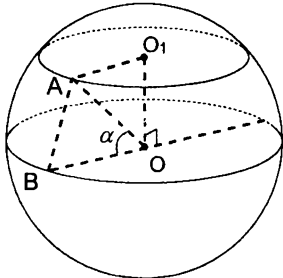
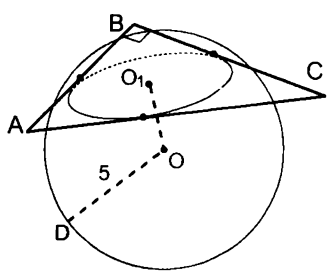
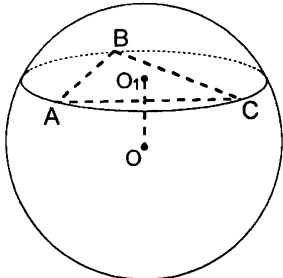
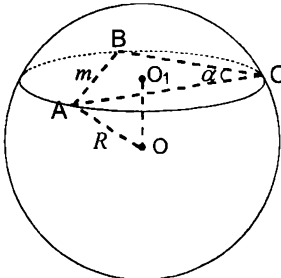
<p>1</p>  <p>Дано: <math>OO_1 = 5</math>, <math>OP = 13</math>. Найти площадь сечения шара плоскостью.</p>	<p>2</p>  <p>Найти площадь сечения шара плоскостью.</p>
<p>3</p>  <p>Дано: <math>AB = m</math>. Найти <math>O_1A</math>.</p>	<p>4</p>  <p>Дано: плоскость <math>ABC</math> пересекает шар. <math>AB = 9</math>, <math>BC = 12</math>. Найти <math>OO_1</math>.</p>
<p>5</p>  <p>Дано: <math>AB = BC = 40</math>, <math>AC = 48</math>, <math>OO_1 = 5</math>. Найти радиус шара.</p>	<p>6</p>  <p>Найти <math>OO_1</math>.</p>

Таблица 11.17. Вписанный и описанный шар.

Найти радиус вписанного шара (рис. 1-2).

Найти радиус описанного шара (рис. 3-6).

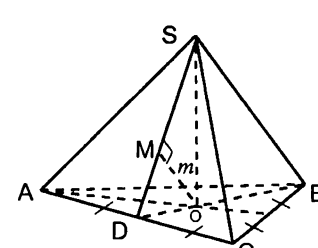
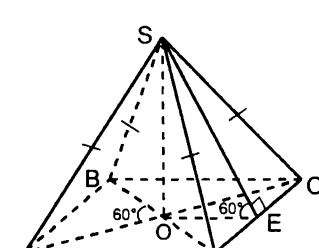
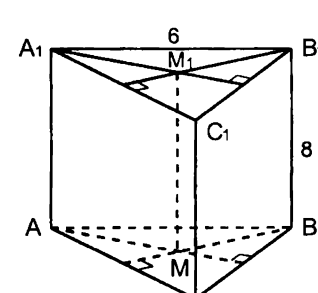
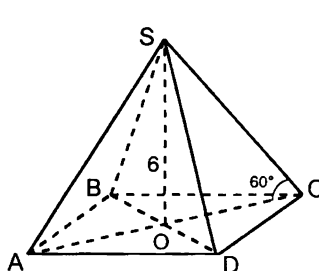
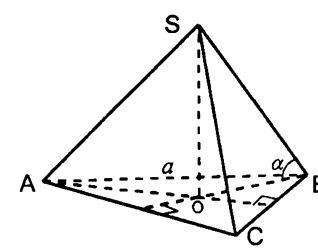
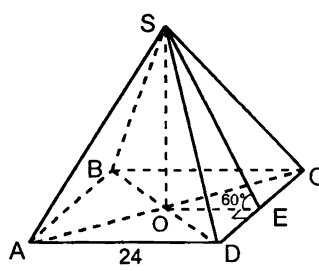
<p><b>1</b></p>  <p>Дано: <math>SABC</math> – правильная треугольная пирамида. <math>\angle SDO = \alpha</math>.</p>	<p><b>2</b></p>  <p>Дано: <math>SABCD</math> – четырехугольная пирамида. <math>ABCD</math> – прямоугольник. <math>AC = 12</math>.</p>
<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>ABCA_1B_1C_1</math> – правильная треугольная призма.</p>	<p><b>4</b></p>  <p>Дано: <math>SABC</math> – правильная четырехугольная пирамида.</p>
<p><b>5</b></p>  <p>Дано: <math>SABC</math> – правильная треугольная пирамида.</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: <math>SABC</math> – правильная четырехугольная пирамида.</p>

Таблица 11.18. Объем параллелепипеда.

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – параллелепипед. Найдите объем параллелепипеда.

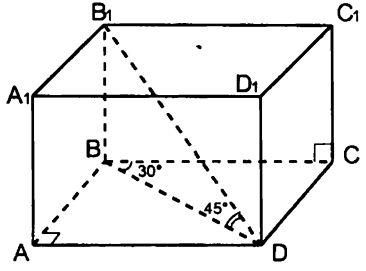
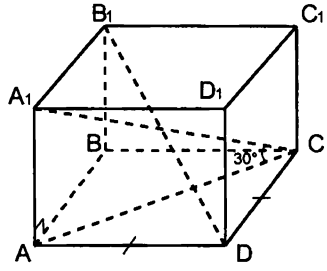
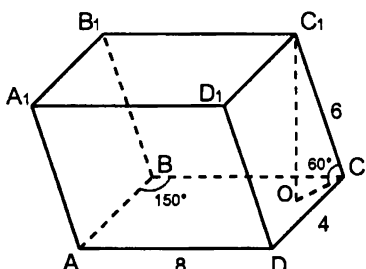
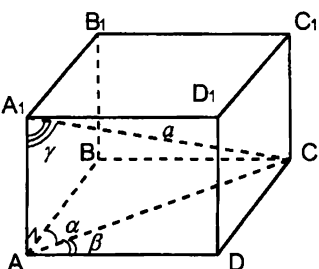
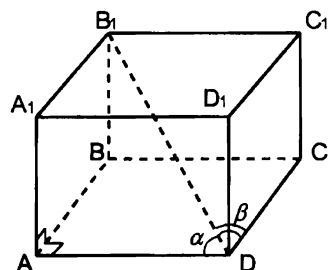
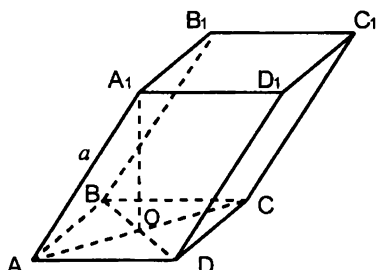
<p><b>1</b></p>  <p>Дано: <math>B_1D = 10\sqrt{2}</math>.</p>	<p><b>2</b></p>  <p>Дано: <math>A_1C = 12, B_1D = 10</math>.</p>
<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>C_1O</math> – высота параллелепипеда.</p>	<p><b>4</b></p> 
<p><b>5</b></p>  <p>Дано: <math>B_1D = d</math>.</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: <math>A_1O</math> – высота параллелепипеда, <math>ABCD</math> – квадрат. <math>\angle A_1AO = \alpha</math>.</p>

Таблица 11.19. Объем призмы.

$A_1A_2\dots A_nA_1'A_2'\dots A_n'$  – призма. Найти объем призмы.

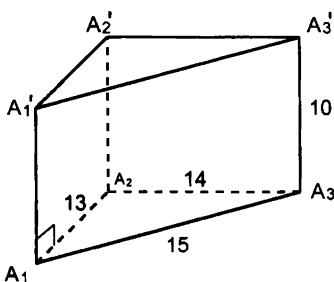
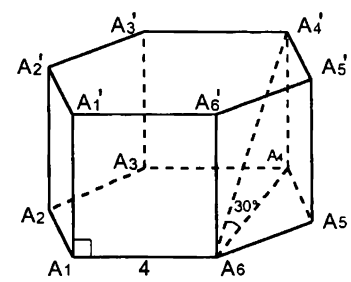
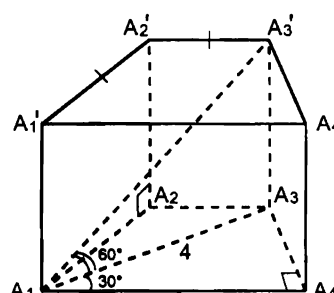
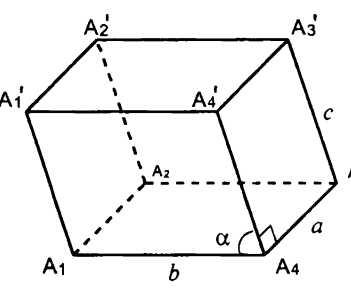
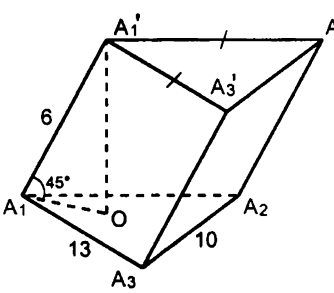
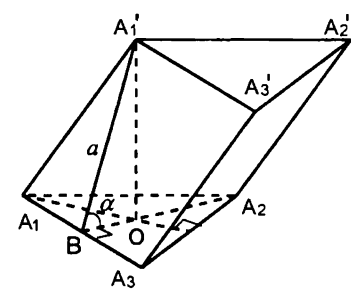
<p>1</p> 	<p>2</p>  <p>Дано: <math>A_1A_2A_3A_4A_5A_6</math> – правильный шестиугольник.</p>
<p>3</p>  <p>Дано: <math>A_1A_2A_3A_4</math> – трапеция.</p>	<p>4</p>  <p>Дано: <math>A_1A_2A_3A_4</math> – прямоугольник.</p>
<p>5</p>  <p>Дано: <math>A_1'O</math> – высота призмы.</p>	<p>6</p>  <p>Дано: <math>\triangle A_1A_2A_3</math> – правильный. <math>A_1'O</math> – высота призмы.</p>

Таблица 11.20. Объем пирамиды.

$SA_1A_2\dots A_n$  – пирамида,  $SO$  – высота пирамиды.  
Найти объем пирамиды.

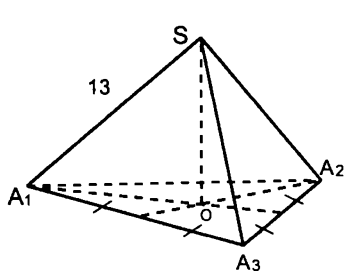
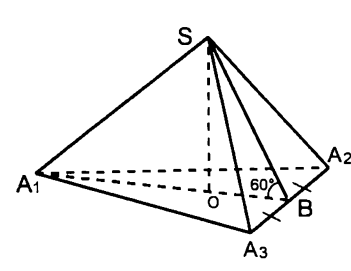
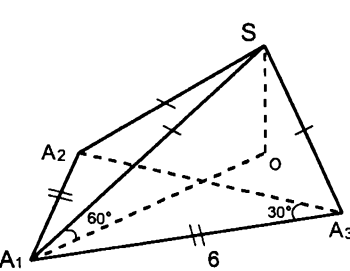
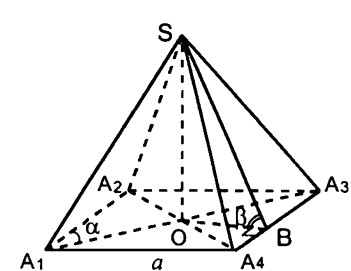
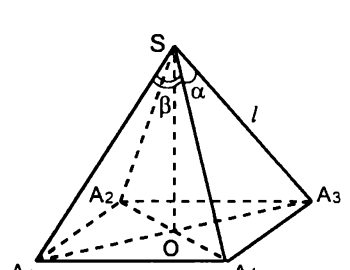
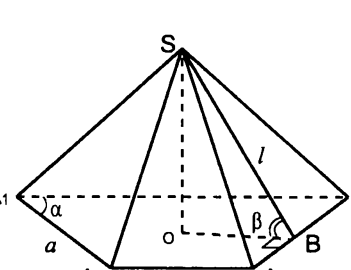
<p><b>1</b></p>  <p>Дано: <math>\Delta A_1A_2A_3</math> – правильный. <math>A_1A_2 = 12\sqrt{3}</math>.</p>	<p><b>2</b></p>  <p>Дано: <math>A_1A_2 = A_1A_3 = 10</math>, <math>A_2A_3 = 12</math>. <math>O</math> – центр окружности, вписанной в <math>\Delta A_1A_2A_3</math>.</p>
<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>\Delta A_1A_2A_3</math> – прямоугольный. Угол при <math>A_2</math> равен <math>60^\circ</math>, угол при <math>A_3</math> равен <math>30^\circ</math>. <math>A_2A_3 = 6</math>.</p>	<p><b>4</b></p>  <p>Дано: <math>A_1A_2A_3A_4</math> – ромб.</p>
<p><b>5</b></p>  <p>Дано: <math>A_1A_2A_3A_4</math> – прямоугольник.</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: <math>A_1A_2A_3A_4</math> – трапеция. <math>A_1A_4 = A_2A_3</math>. <math>O</math> – центр окружности, вписанной в трапецию.</p>

Таблица 11.21. Объем пирамиды.

$SA_1A_2...A_n$  – пирамида.  $SO$  – высота пирамиды (рис. 2, 4-6),  $SA_3$  – высота пирамиды (рис. 1, 3). Найти объем пирамиды.

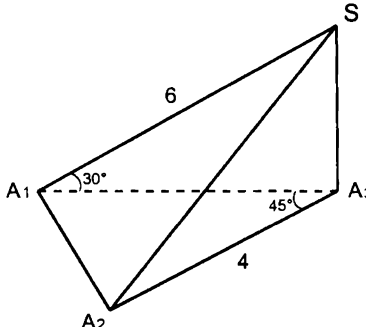
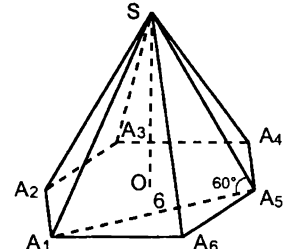
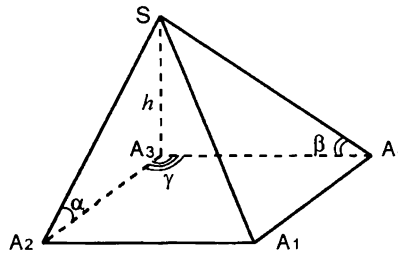
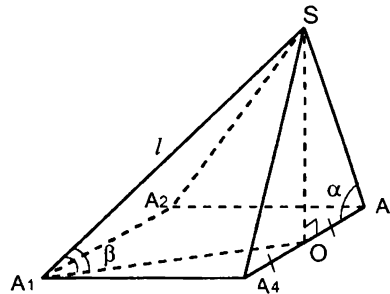
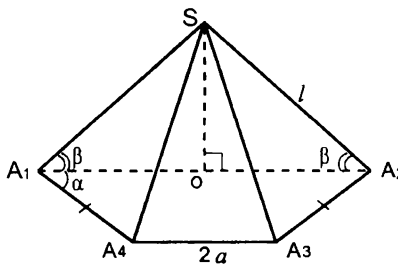
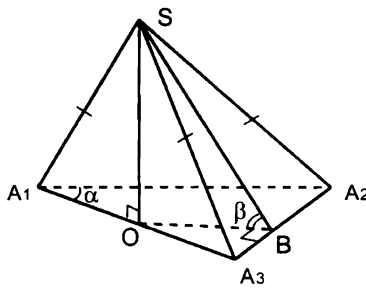
<p><b>1</b></p> 	<p><b>2</b></p>  <p>Дано: <math>SA_1A_2A_3A_4A_5A_6</math> – правильная шестиугольная пирамида.</p>
<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>A_1A_2A_3A_4</math> – параллелограмм.</p>	<p><b>4</b></p>  <p>Дано: <math>A_1A_2A_3A_4</math> – прямоугольник.</p>
<p><b>5</b></p>  <p>Дано: <math>A_1A_2A_3A_4</math> – трапеция.</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: <math>OB = m</math>.</p>

Таблица 11.22. Объем пирамиды. Объем усеченной пирамиды.

$SA_1A_2\dots A_n$  – правильная пирамида,  $SO$  – высота пирамиды (рис. 1-3);

$SA_1A_2\dots A_nA'_1A'_2\dots A'_n$  – правильная усеченная пирамида (рис. 4-6).

Найти объем пирамиды.

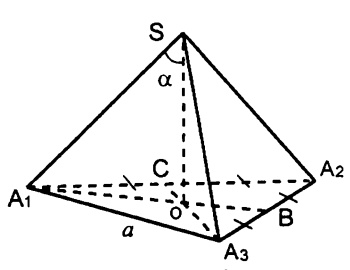
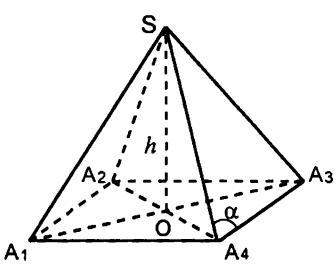
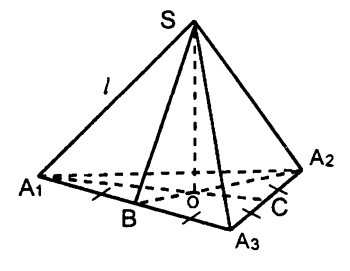
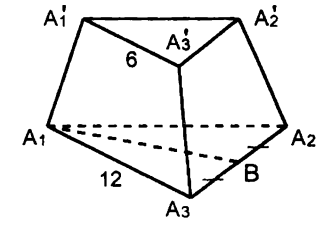
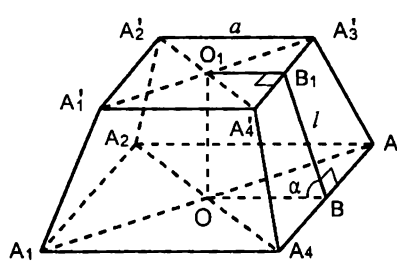
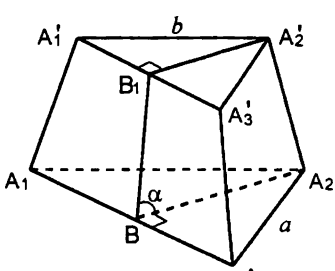
<p>1</p> 	<p>2</p> 
<p>3</p>  <p>Дано: <math>\angle SBO = \alpha</math>.</p>	<p>4</p>  <p>Дано: <math>\angle A'_1A_1B = 60^\circ</math></p>
<p>5</p> 	<p>6</p> 

Таблица 11.23. Объем и площадь боковой поверхности цилиндра.

$OO_1$  – ось цилиндра. Найти объем и площадь боковой поверхности цилиндра.

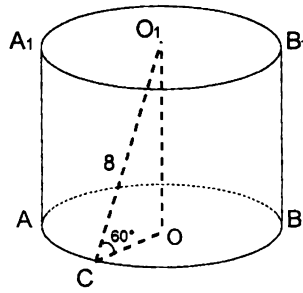
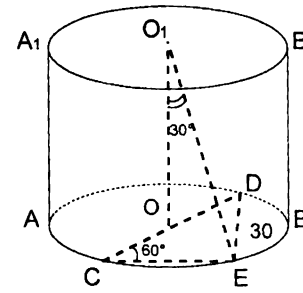
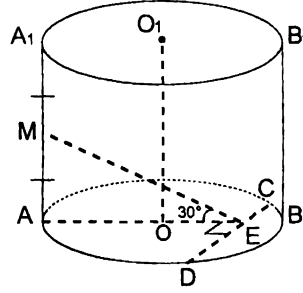
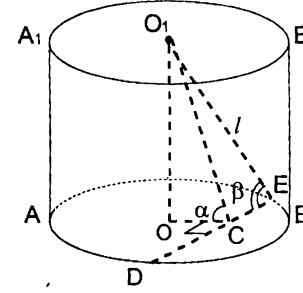
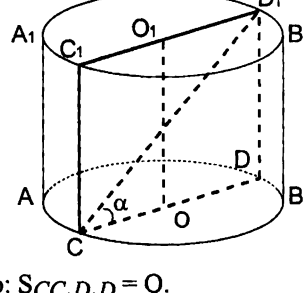
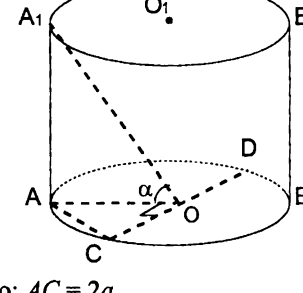
<p><b>1</b></p> 	<p><b>2</b></p> 
<p><b>3</b></p>  <p>Дано: <math>OE = 6, CD = 16</math>.</p>	<p><b>4</b></p> 
<p><b>5</b></p>  <p>Дано: <math>S_{CC_1D_1D} = Q</math>.</p>	<p><b>6</b></p>  <p>Дано: <math>AC = 2a</math>.</p>



Таблица 11.24. Объем и площадь боковой поверхности конуса.

$SO$  – высота конуса. Найдите объем и площадь боковой поверхности конуса.

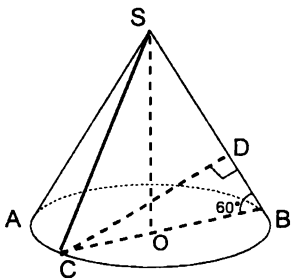
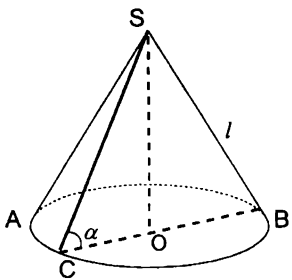
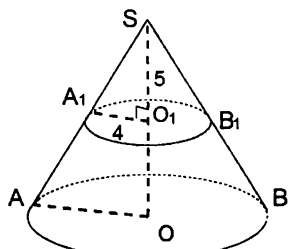
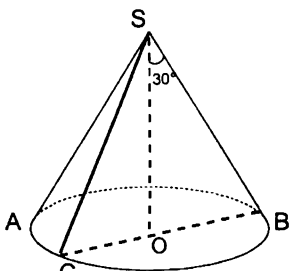
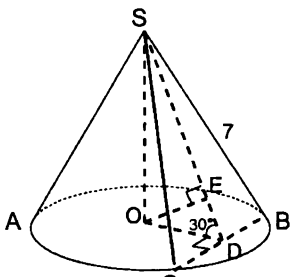
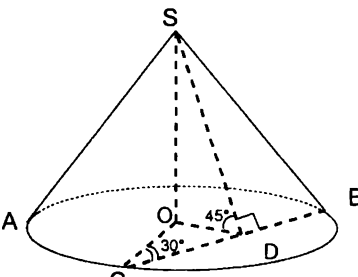
<p>1</p>  <p>Дано: <math>CD = 6</math>.</p>	<p>2</p> 
<p>3</p>  <p>Дано: <math>O_1</math> – центр круга – сечения конуса плоскостью, <math>SO = 15</math>.</p>	<p>4</p>  <p>Дано: <math>S_{SBC} = Q</math>.</p>
<p>5</p>  <p>Дано: <math>OE = 3</math>.</p>	<p>6</p>  <p>1) Дано: <math>BC = 12</math>. 2) Дано: <math>SB = 3\sqrt{5}</math>.</p>

Таблица 11.25. Объем конуса. Объем усеченного конуса. Площадь боковой поверхности конуса. Площадь боковой поверхности усеченного конуса.

$SO$  – высота конуса (рис. 1-3),  $O$  и  $O_1$  – центры оснований усеченного конуса (рис. 4-6). Найти объем и площадь боковой поверхности конуса.

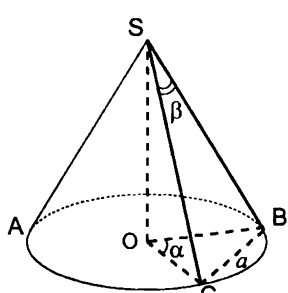
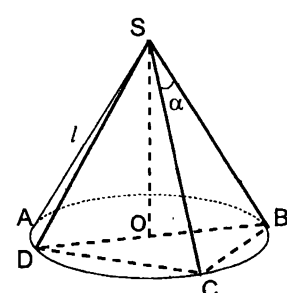
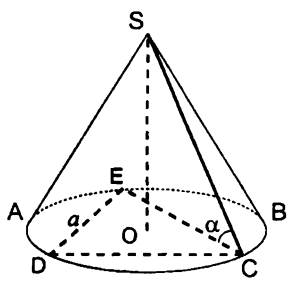
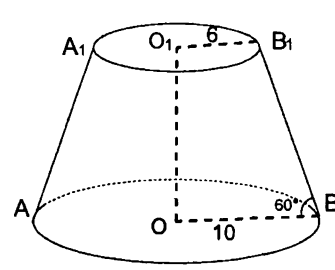
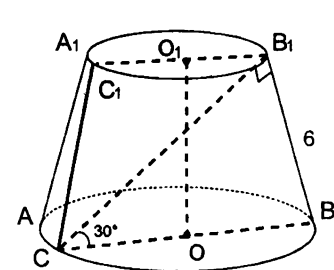
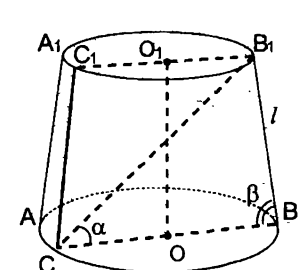
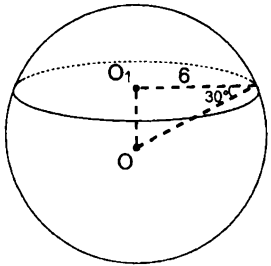
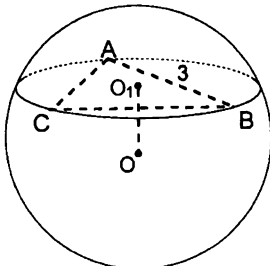
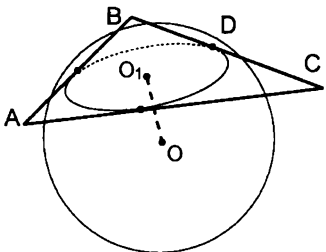
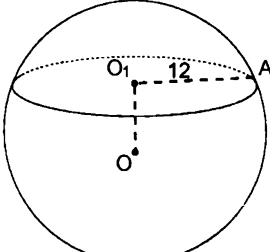
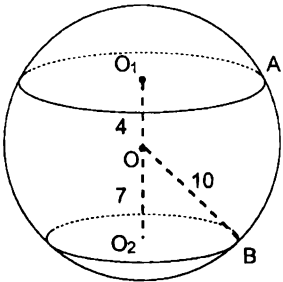
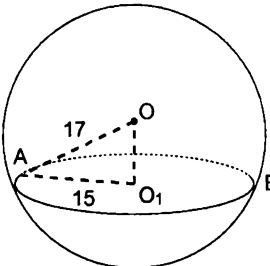
<p>1</p> 	<p>2</p>  <p>Дано: <math>\angle DSC = \beta</math>.</p>
<p>3</p>  <p>Дано: <math>\triangle CDE</math> – правильный.</p>	<p>4</p> 
<p>5</p> 	<p>6</p> 

Таблица 11.26. Объем шара. Площадь поверхности шара.

$O$  – центр шара,  $O_1$  и  $O_2$  – центры кругов – сечений шара плоскостью. Найти объем и площадь поверхности шара (рис. 1-3).

<p>1</p> 	<p>2</p>  <p>Дано: <math>\triangle ABC</math> – правильный, <math>OO_1 = 3</math>.</p>
<p>3</p>  <p>Дано: <math>OO_1 = 4</math>, <math>AB = AC = 10</math>, <math>BC = 12</math>.</p>	<p>4</p>  <p>Дано: <math>OO_1 = 5</math>. Найти объем и площадь сферической части меньшего из шаровых сегментов.</p>
<p>5</p>  <p>Найти объем и площадь сферической части шарового кольца.</p>	<p>6</p>  <p>Найти объем и площадь сферической части меньшего из шаровых сегментов.</p>

## Ответы, указания, решения

### Повторение.

**Таблица 1.** 3.  $BC = b \operatorname{tg} \beta$ ,  $AB = b \operatorname{tg} \beta \sin \alpha$ ,  $AC = b \operatorname{tg} \beta \cos \alpha$ . 4.  $AB = AC = \frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ . 5.  $AB = AC = \frac{l}{\cos \alpha}$ ,  $BC = 2l \operatorname{tg} \alpha$ . 6.  $AC = 2m \cos \alpha$ ,  $AB = \frac{2m \cos \alpha}{\sin \beta}$ ,  $BC = 2m \cos \alpha \operatorname{ctg} \beta$ . 7.  $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$ ,  $BC = \frac{AB \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$ ,  $AC = \frac{AB \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ . 8.  $AC = 2r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ ,  $AB = BC = \frac{r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$ . 9.  $AB = 2R \sin(\alpha + \beta)$ ,  $BC = 2R \sin \alpha$ ,  $AC = 2R \sin \beta$ . 10.  $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$ . 11.  $R = \frac{a}{2 \cos \frac{\beta}{2}}$ . 12.  $\frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ .

Указание. Радиус окружности, описанной около трапеции  $ABCD$ , равен радиусу окружности, описанной около  $\triangle ABD$ , в котором  $\angle ADB = \frac{\alpha}{2}$ .

**Таблица 2.** 3.  $3\sqrt{3}$ . 4. 120. 5. 156. 6.  $3\sqrt{3}$ . 7.  $9(1 + \sqrt{3})$ . 8.  $12\sqrt{3}$ . 9. 32. 10. 18. Указание.  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} OA \cdot OC \cdot \sin 150^\circ$ . 11. 60. Решение. Пусть  $r$  – радиус окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ . Тогда  $AC = r + 12$ ,  $BC = r + 5$ ,  $(r + 5)^2 + (r + 12)^2 = 17^2$ , откуда  $r = 3$ ,  $AC = 15$ ,  $BC = 8$ . 12.  $r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha$ . Решение. Из  $\triangle AOD$ :  $AD = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ , из  $\triangle ABD$ :  $BD = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha$ .  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha = r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha$ .

**Таблица 3.** 3. 40. 4.  $18\sqrt{2}$ . 8. 80. Указание.  $OE^2 = AE \cdot ED$ . 10. 225. 11. 64. Указание. Доказать, что высота трапеции равна её средней линии. 12. 150. Указание. Из  $\triangle AOB$  ( $\angle O = 90^\circ$ )  $OE^2 = AE \cdot BE$ , откуда  $OE = 6$ ,  $CD = 12$ .  $AB + CD = BC + AD = 25$ .

Ответы, указания, решения

**Таблица 4.1.** 1.  $\frac{1}{2}d^2 \sin 2\alpha$ . 2.  $m^2(m+n) \operatorname{ctg} \alpha$ . 3.  $\frac{b^2 \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$ . Указание.

Из  $\triangle ABD$  по теореме синусов  $AD = \frac{b \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$ . 4.  $\frac{1}{2}a(2b + a \cos \beta) \sin \beta$ .

Указание. Проведем  $BE \perp AD$ . Из  $\triangle ABE$ :  $BE = a \sin \beta$ ,  $AE = -a \cos \beta$ . Тогда  $BC = AD - AE = b + a \cos \beta$ . 5.  $\frac{1}{2}d^2 \sin 2\alpha$ . Указание.  $AE = \frac{1}{2}(AD + BC)$ .

6.  $2R^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha$ . Указание. Из  $\triangle ACD$  ( $\angle C = 90^\circ$ ):  $CD = 2R \cos \alpha$ . Проведем  $CE \perp AD$ . Из  $\triangle CED$ :  $CE = CD \sin \alpha = 2R \cos \alpha \sin \alpha$ . Из  $\triangle ACE$ :  $AE = CE \operatorname{tg} \alpha =$

$= 2R \sin^2 \alpha$ .  $AE = \frac{1}{2}(AD + BC)$ . 7.  $\frac{1}{2}(b^2 - a^2) \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ . Указание. Проведем

$CE \parallel AB$ . Из  $\triangle CDE$  по теореме синусов:  $CD = \frac{ED \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{(b - a) \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$ .

Проведем  $CF \perp AD$ . Из  $\triangle CDF$   $CF = CD \sin \beta = \frac{(b - a) \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ . 8.  $20\sqrt{3}$ .

Решение. Из  $\triangle ABD$  по теореме косинусов:  $BD^2 = 3^2 + 10^2 - 60 \cos \angle A$ . Из  $\triangle BCD$  по теореме косинусов:  $BD^2 = 5^2 + 8^2 + 80 \cos \angle A$ . Тогда  $\cos \angle A = \frac{1}{7}$ ,

$\sin \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ ,  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(3 \cdot 10 + 5 \cdot 8) \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = 20\sqrt{3}$ . 9.  $\frac{121\sqrt{3}}{3}$ . Указание. Из

$\triangle ADC$ :  $AC = 14$ . Проведем  $BE \perp AC$ . Т.к.  $\angle ABC = 120^\circ$ , то  $\angle BCA = 30^\circ$ , и  $AE = EC = 7$ . Из  $\triangle ABE$ :  $BE = \frac{7}{\sqrt{3}}$ .  $S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}$ .

**Стереометрия. 10 класс.**

**Таблица 10.1.** 4. Нет. Указание. Воспользоваться методом доказательства от противного.

**Таблица 10.2.** 1. Нет. Указание. Если бы прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$  лежали в одной плоскости, то точки  $M$ ,  $K$  и  $P$  лежали бы на одной прямой. 2. Доказательство. Предположим, что прямые  $a$  и  $b$  лежат в одной плоскости. Тогда прямая  $c$  также принадлежит этой плоскости. Через прямые  $a$  и  $c$  можно провести единственную плоскость (плоскость  $\alpha$ ), которой будет принадлежать и прямая  $b$ . Противоречие. 3. Указание. Искомая точка – точка пересечения прямых  $m$  и  $l$ . 4. Указание. Прямая пересечения плоскостей  $ABC$  и  $\beta$  проходит через точку  $C$  и точку пересечения прямых  $AB$  и  $l$ .

**Таблица 10.3.** 3. Указание. Воспользоваться методом доказательства от противного. 4. Указание. Воспользоваться методом доказательства от противного. 5. Доказательство. Предположим, что прямые  $a$  и  $b$  не

скрещивающиеся. Тогда они лежат в одной плоскости. Но через прямую  $b$  и точку  $D$  проходит единственная плоскость, в которой лежит и прямая  $BC$  ( $BC \parallel b$ ). Имеем: прямая  $a$  лежит в плоскости  $ABC$ . Противоречие. 6. 26. Указание. Доказать, что  $EFKP$  – параллелограмм. 7. 9. Решение.  $KK_1$  – средняя линия трапеции  $AA_1B_1B$ , откуда  $KK_1 = 7$ .  $DD_1$  – средняя линия трапеции  $KK_1C_1C$ , откуда  $CC_1 = 9$ . 8. Указание. Проведем  $KF \parallel BD$ . Тогда  $KK_1$  – средняя линия трапеции  $BDEC$ ,  $KF = 6$ .  $MF$  – средняя линия треугольника  $ABC$ ,  $MF = 4$ .  $MF + FK = KM$ , то есть точки  $M$ ,  $F$  и  $K$  лежат на одной прямой, то есть прямая  $MK$  лежит в плоскости  $ABC$ .

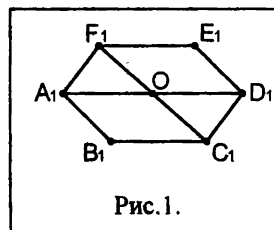
**Таблица 10.4.** 3. Доказательство. Так как  $a \parallel b$ , то  $a \parallel \beta$ , откуда  $a \parallel c$ . 4. Указание. Выбрать на прямой  $a$  точку  $A$  и провести через точку  $A$  и прямую  $b$  плоскость  $\gamma$ . Доказать, что прямая  $a$  лежит в этой плоскости. 5. Доказательство. Предположим, что  $a \parallel \alpha$ . Через  $M$  и  $a$  проведем плоскость. Она пересекает плоскость  $\alpha$  по прямой  $c$ , параллельной  $a$ . Тогда через точку  $M$  проходят две прямые, переллельные прямой  $a$ . Противоречие. 7. 14. Указание. Рассмотреть подобные треугольники  $ABC$  и  $AB_1C_1$ .

**Таблица 10.5.** 6. Доказательство. Так как  $AA_1 : A_1D = BB_1 : B_1D$ , то  $AB \parallel A_1B_1$ . Аналогично,  $BC \parallel B_1C_1$ , откуда плоскости  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  параллельны.

**Таблица 10.6.** 5. Доказательство. Предположим, что прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  лежат в одной плоскости. Тогда и прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  лежат в одной плоскости, что противоречит условию. 6. 6; 8; 4. 7. 10; 2,4. 8. Доказательство.  $AB \parallel A_1B_1$ ,  $\triangle AMB \sim \triangle A_1MB_1$ , откуда  $AM : MA_1 = BM : MB_1 = AB : A_1B_1$ . Из подобия треугольников  $BMC$  и  $B_1MC_1$ :  $BM : MB_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$ ; из подобия треугольников  $AMC$  и  $A_1MC_1$ :  $AM : MA_1 = AC : A_1C_1$ , откуда  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  (по трем сторонам).

**Таблица 10.7.** 4. Указание. Точка  $D_1$  – проекция точки  $D$  лежит на пересечении прямых, параллельных прямым  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$ , проведенных через точки  $C_1$  и  $A_1$  соответственно. 5. Решение. Пусть точка  $K$  – середина отрезка  $A_1B_1$ . Проведем луч  $KM_1$  и отложим на нем отрезок  $M_1C_1 = 2M_1K$ . Точка  $C_1$  – искомая.

6. Решение. Проведем прямые  $A_1M \parallel B_1C_1$  и  $C_1N \parallel A_1B_1$ . Точка пересечения этих прямых – точка  $O_1$  – проекция центра правильного шестиугольника. Далее строим точки  $D_1$ ,  $E_1$  и  $F_1$ , симметричные точкам  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно относительно точки  $O$ . Шестиугольник  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  – искомый (рис.1). 7. Указание. Искомые перпендикуляры параллельны сторонам четырехугольника  $ABCD$ .



*Ответы, указания, решения*

**Таблица 10.8.** 1. Указание. Искомый перпендикуляр параллелен диагонали  $AC$ . 2. Указание. Искомые перпендикуляры параллельны медианам  $\triangle ABC$ . 3. Указание. Искомая высота параллельна прямой, которая проходит через середины отрезков  $BC$  и  $AD$ . 4. Указание. Проекция биссектриссы угла  $A$  делит сторону  $B_1C_1$  в отношении 2:1, считая от точки  $C$ . 5. Решение. Проведем хорду, параллельную  $AB$ . Через ее середину и точку  $O$  проведем диаметр. Он и будет искомым. 6. Решение. Проведем две параллельные хорды. Через их середины проведем хорду, которая будет проекцией диаметра, а ее середина – проекцией центра окружности.

**Таблица 10.9.** 3. Решение. Прямая  $CB$  перпендикулярна плоскости  $AMB$ ,  $AD \parallel BC$ , откуда прямая  $AD$  перпендикулярна плоскости  $AMB$  и  $AD \perp AM$ . 4. Указание. Доказать, что прямая  $BC$  перпендикулярна плоскости  $AMD$ . 5. Указание.  $MO$  – высота равнобедренных треугольников  $AMC$  и  $BMD$ . 6. Решение.  $MO \perp BD$ ,  $AC \perp BD$ , откуда прямая  $BD$  перпендикулярна плоскости  $AMC$ .

**Таблица 10.10.** 1. 1. 2. 5. 3. 5. 4. 4. Решение. Радиус  $R$  окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , равен:  $R = \frac{AB}{2 \sin ABC} = \frac{6}{2 \sin 120^\circ} = 2\sqrt{3}$ . Из  $\triangle MOC$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):  $MC = \sqrt{MO^2 + OC^2} = 4$ . 5. 12. Решение. Из  $\triangle ABC$ :  $AB = \frac{6}{\cos 30^\circ} = 4\sqrt{3}$ . Из  $\triangle AMB$  ( $\angle B = 90^\circ$ ):  $MB = AB \operatorname{tg} 60^\circ = 12$ . 6.  $2\sqrt{6}$ ; 4. Решение. Из  $\triangle AMD$  ( $\angle A = 90^\circ$ ):  $AD = MD \cos 60^\circ = 4$ ,  $AM = MD \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$ . Из  $\triangle AMB$  ( $\angle B = 90^\circ$ ):  $AB = AM \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$ .

**Таблица 10.11.** 4. 6. 5. 18. 6.  $\sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}$ . 7.  $4\sqrt{21}$ . Решение. Из  $\triangle AA_1C$  ( $\angle A_1 = 90^\circ$ ):  $AC = 16$ . Из  $\triangle ABC$ :  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 20$ . Из  $\triangle AA_1B$  ( $\angle A_1 = 90^\circ$ ):  $BA_1 = \sqrt{AB^2 - AA_1^2} = 4\sqrt{21}$ . 8. 12. 9. 16. Решение. Из  $\triangle AA_1C$  ( $\angle A_1 = 90^\circ$ ):  $AA_1 = A_1C \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3}$ ,  $AC = 8$ . Из  $\triangle AA_1B$  ( $\angle A_1 = 90^\circ$ ):  $AB = 8\sqrt{3}$ . Из  $\triangle ABC$ :  $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 16$ .

**Таблица 10.12.** 1.  $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ;  $\frac{\sqrt{69}}{2}$ . 2.  $5\sqrt{10}$ . Решение. Из  $\triangle AA_1D$  ( $\angle A_1 = 90^\circ$ ):  $A_1D = 12$ ; из  $\triangle A_1BD$  ( $\angle D = 90^\circ$ ):  $BA_1 = 13$ , из  $\triangle AA_1B$  ( $\angle A_1 = 90^\circ$ ):  $AB = 5\sqrt{10}$ . 3.  $45^\circ$ . Решение.  $AB = AC = 2\sqrt{2}$ . Проведем  $AD \perp BC$ . Из  $\triangle ADC$  ( $\angle D = 90^\circ$ ):  $\cos x = \frac{CD}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , откуда  $x = 45^\circ$ . 4.  $60^\circ$ . Решение. Из  $\triangle AA_1C$

Ответы, указания, решения

( $\angle A_1 = 90^\circ$ ):  $AA_1 = AC \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}$ ,  $A_1C = 5$ . Из  $\triangle ABA_1$  ( $\angle A_1 = 90^\circ$ ):  $A_1B = \sqrt{AB^2 - AA_1^2} = 8$ . Из  $\triangle A_1BC$  по теореме косинусов:  $\cos x = \frac{BA_1^2 + CA_1^2 - BC^2}{2A_1B \cdot A_1C} = \frac{64 + 25 - 49}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2}$ ,  $x = 60^\circ$ . 5.  $\arcsin \frac{a \operatorname{ctg} \alpha}{b}$ ,  $\sqrt{b^2 - a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ . 6.  $\arcsin \frac{b \sin \beta \sin \alpha}{a}$  или  $\pi - \arcsin \frac{b \sin \beta \sin \alpha}{a}$ . 7.  $\frac{m \sin \beta \sin \alpha}{\sin \gamma}$ . Решение. Из  $\triangle ABC$  по теореме синусов:  $AB = \frac{m \sin \beta}{\sin \gamma}$ .

Из  $\triangle AA_1B$  ( $\angle A_1 = 90^\circ$ ):  $AA_1 = AB \sin \alpha = \frac{m \sin \beta \sin \alpha}{\sin \gamma}$ .

8.  $\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta) \operatorname{tg}^2 \alpha + b^2}$ . Решение. Из  $\triangle A_1BC$  по теореме косинусов:  $A_1C = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta}$ . Из  $\triangle AA_1C$  ( $\angle A_1 = 90^\circ$ ):  $AA_1 = A_1C \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ . Из  $\triangle AA_1B$  ( $\angle A_1 = 90^\circ$ ):  $AB = \sqrt{A_1B^2 + AA_1^2} = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta) \operatorname{tg}^2 \alpha + b^2}$ .

**Таблица 10.13.** 4. 30. 5.  $\sqrt{m^2 + a^2 \sin^2 \alpha}$ . Решение. Проведем  $MD \perp AC$ .  $BD \perp AC$  (по теореме о трех перпендикулярах). Из  $\triangle BDC$  ( $\angle D = 90^\circ$ ):  $BD = a \sin \alpha$ . Из  $\triangle BMD$  ( $\angle B = 90^\circ$ ):  $MD = \sqrt{m^2 + a^2 \sin^2 \alpha}$ . 6. Доказательство. Проведем  $MD \perp AB$  и  $ME \perp BC$ .  $OD \perp AB$ ,  $OE \perp BC$  (по теореме о трех перпендикулярах).  $\triangle MBD = \triangle MBE$  (по гипотенузе и острому углу), откуда  $MD = ME$ .  $OD = OE$  (как проекции равных наклонных).  $\triangle BOD = \triangle BOE$  (по катету и гипотенузе), откуда  $\angle OBD = \angle OBE$ .

**Таблица 10.14.** 2. Провести медианы  $BM_1$  и  $AM_2$ . Провести  $DD_1 \parallel BM_1$  и  $DD_2 \parallel AM_2$ , где точки  $D_1$  и  $D_2$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  соответственно.  $MD_1$  и  $MD_2$  – искомые перпендикуляры. 3. Указание. Основание искомого перпендикуляра – точка  $M_1$  такая, что  $BC : CM_1 = 2:1$ . 4. 13 и 15. 5. 8;  $4\sqrt{2}$ . Решение. Проведем  $CE \perp AB$ ,  $CE = 8\sqrt{3}$ . Проведем  $OF \parallel AB$ .  $OF = 4\sqrt{3}$ . Из  $\triangle MOF$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):  $MF = \sqrt{MO^2 + OF^2} = 8$ . Проведем  $OK \perp BD$ ,  $OK = 4$ . Из  $\triangle MOK$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):  $MK = 4\sqrt{2}$ .  $MF$  и  $MK$  – искомые расстояния. 6. 10, 17. Решение. Проведем  $BE \perp AD$ ,  $BE = 6$ . Из  $\triangle MBE$  ( $\angle B = 90^\circ$ ):  $ME = 10$ .  $ME$  – расстояние от точки  $M$  до прямой  $AD$ . Аналогично находим расстояние от точки  $M$  до прямой  $AC$ .



Ответы, указания, решения

**Таблица 10.15.** 1.  $\sqrt{14}$ . Решение. Из  $\triangle MOC$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):  $OC = 2$ . Из  $\triangle OCK$  ( $\angle K = 90^\circ$ ,  $OK = CK$ ):  $OK = CK = \sqrt{2}$ . Из  $\triangle MKC$  ( $\angle K = 90^\circ$ ):  $MK = \sqrt{MC^2 - CK^2} = \sqrt{14}$ . 2. 5. Решение. Из  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ):  $AB = 25$ .  $CD \perp AB$  (по теореме о трех перпендикулярах).  $CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = 12$ . Из  $\triangle MDC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ):  $MC = 5$ . 3. 13. Указание. Найти высоту  $CD$  треугольника  $ABC$ , воспользовавшись тем, что  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB$ . 4. 8. Указание.  $OD = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$ . 5. 8. Указание. Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, можно найти по формуле  $r = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$ , где  $a$  и  $b$  – основания трапеции. 6.  $\arccos(\cos\alpha\cos\beta)$ . Решение. Пусть  $AC = a$ . Тогда из  $\triangle ACB$ :  $BC = a\cos\beta$ . Из  $\triangle MCA$  ( $\angle A = 90^\circ$ ):  $MC = \frac{a}{\cos\alpha}$ , из  $\triangle MCB$  ( $\angle B = 90^\circ$ ):  $\cos MCB = \frac{BC}{MC} = \cos\alpha\cos\beta$ .

**Таблица 10.16.** 1. Доказательство. 1 способ.  $MB$  – линия пересечения плоскостей  $AMB$  и  $СMB$ .  $AB \perp MB$ ,  $CB \perp MB$ . Так как  $\angle ABC = 90^\circ$ , то плоскости  $AMB$  и  $СMB$  перпендикулярны. 2 способ.  $AB \perp BC$ ,  $AB \perp MB$ , значит, прямая  $AB$  перпендикулярна плоскости  $MBC$ . Так как плоскость  $AMB$  проходит через прямую  $AB$ , перпендикулярную плоскости  $MBC$ , то плоскости  $AMB$  и  $MBC$  перпендикулярны. 2. Указание.  $AC \perp BD$ ,  $AC \perp MD$ . Значит, прямая  $AC$  перпендикулярна плоскости  $DMB$ . 3. 1) Указание. Доказать, что прямая  $MO$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . 2) Указание. Доказать, что прямая  $AC$  перпендикулярна плоскости  $BMD$ . 4. Указание. Доказать, что прямая  $MO$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . 5. Доказательство. Через точку  $A$  в плоскости  $\alpha$  проведем прямую  $c$ ,  $c \perp a$ . Плоскость, проходящая через прямые  $b$  и  $c$ , перпендикулярна прямой  $a$ . Так как  $\alpha \perp \beta$ , то угол между прямыми  $b$  и  $c$  равен  $90^\circ$ . Поскольку  $b \perp a$  и  $b \perp c$ , то  $b \perp \alpha$ . 6. Указание. Проведем через точку  $M$  прямую  $MB_1$ , перпендикулярную  $AB$ . Тогда  $MB_1$  перпендикулярна плоскости  $ABC$  (задача 5). Аналогично, если прямая  $MB_2$  перпендикулярна  $BC$ , то  $MB_2$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . Получаем, что через точку  $M$  проходят два различных перпендикуляра к плоскости  $ABC$ . Противоречие.

**Таблица 10.17.** 1. 12. Указание. Искомое расстояние равно высоте треугольника  $DFC$ , проведенной к стороне  $DF$ . 2. 17. Указание.  $AB^2 = AA_1^2 + A_1B_1^2 + BB_1^2$ . 3.  $12\sqrt{2}$ . 4. 10. Указание.  $D_1B \perp AB$ ,  $C_1A \perp AB$  (теорема о трех перпендикулярах). Тогда  $AC_1D_1B$  – прямоугольник,  $AC_1 = BD_1$ .

Ответы, указания, решения

5.  $3\sqrt{26}$ . Указание.  $NC = 5$ ,  $AM = 8$ . Проведем  $NK \perp AM$ .  $NK = AC = 15$ ,  $KM = 3$ .

**Таблица 10.18.** 1. 5. 2. 12. 3.  $2\sqrt{14}$ . 4.  $2\sqrt{2}$ . Указание. Искомое расстояние равно высоте  $BE$  параллелограмма  $ABCD$ , проведенной к стороне  $AD$ .

5.  $3\sqrt{2}$ . Указание. Искомое расстояние равно высоте  $EF$   $\triangle EMB$ , где  $E$  – середина  $AC$ . 6.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ . Указание. Провести  $MO \perp BD$ . Искомое расстояние равно высоте  $OE$   $\triangle AMO$ .

**Таблица 10.19.** 2.  $A(2;0;0)$ ,  $B(2;0;-2)$ ,  $C(0;0;2)$ . 3. Указание. Сторона куба равна 4. 4.  $2\sqrt{2}$ ;  $M(2\sqrt{2};8;5)$ . Указание.  $A(4;7;8)$ ,  $B(-6;9;2)$ . 5.  $P(\sqrt{6};2;0)$ ,  $K(\sqrt{6};4;\sqrt{6})$ .  $\sqrt{10}$ . Решение. Из  $\triangle OAB$  ( $\angle B = 90^\circ$ ):  $OB = 4$ ,  $AB = 4\sqrt{3}$ . Тогда  $B(0;4;0)$ . Из  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ):  $AC = BC = 2\sqrt{6}$ . Тогда  $C(2\sqrt{6};4;0)$ ,  $A(2\sqrt{6};4;2\sqrt{6})$ , откуда  $K(\sqrt{6};4;\sqrt{6})$ ,  $P(\sqrt{6};2;0)$ ,  $PK = \sqrt{10}$ . 6.  $2\sqrt{5} + \sqrt{73} + \sqrt{29}$ . Решение.  $B_1(6;0;4)$ ,  $P$  – середина отрезка  $B_1O$ . Тогда  $P(3;0;2)$ .  $C(6;-8;0)$ ,  $K$  – середина отрезка  $OC$ . Тогда  $K(3;-4;0)$ .  $M(6;-8;2)$ . Тогда  $PK = 2\sqrt{5}$ ,  $PM = \sqrt{73}$ ,  $KM = \sqrt{29}$ .

**Таблица 10.20.** 1. 1)  $90^\circ$ ; 2)  $45^\circ$ ; 3)  $90^\circ$ . 2.  $90^\circ$ . Решение. Проведем через точку  $C$  прямую  $l$ , параллельную  $AB$ . Тогда угол между  $CD$  и  $AB$  равен углу между  $CD$  и  $l$ . По теореме о трех перпендикулярах  $CD \perp l$ . 3.  $90^\circ$ . Указание. Провести через точку  $D$  прямую  $l$ , параллельную  $AC$ . Угол между  $MD$  и  $AC$  равен углу между  $MD$  и  $l$ . 4.  $90^\circ$ . Указание. Через точку  $B$  провести прямую, параллельную  $AC$ . 5.  $\text{arctg} \sqrt{2}$ . Решение. Угол между  $MD$  и  $BC$  равен углу между  $AD$  и  $MD$ . Пусть  $AB = a$ , тогда  $AM = a\sqrt{2}$ . Из  $\triangle MAD$   $\text{tg} MDA = \sqrt{2}$ .

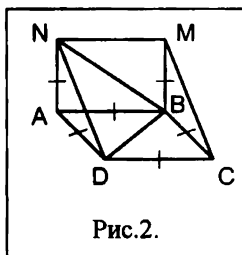


Рис.2.

6.  $60^\circ$ . Решение. Через точку  $A$  проведем перпендикуляр  $AN$  к плоскости  $ABC$  и отложим на нем отрезок  $AN = BM$  (рис.2). Тогда  $\triangle AND = \triangle ANB = \triangle BCD$  (по двум катетам), откуда  $ND = NB = BD$ . Так как  $MC \parallel ND$ , то угол между прямыми  $MC$  и  $BD$  равен углу между прямыми  $ND$  и  $BD$ , т.е. искомый угол равен  $60^\circ$ .

**Таблица 10.21.** 3.  $45^\circ$ . 4.  $30^\circ$ . Решение. Из  $\triangle ABC$   $AC = 2\sqrt{3}$ . Из  $\triangle MAB$   $\cos MBA = \frac{BA}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , откуда  $\angle MBA = 30^\circ$ . 5.  $\text{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Решение. Пусть

Ответы, указания, решения

$AC = a$ , тогда  $AB = a\sqrt{2}$ . Из  $\triangle MAB$   $\operatorname{tg}MBA = \frac{MA}{MB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . 6.  $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

Решение. Пусть  $MA = a$ , тогда  $BE = 2a$ . Из  $\triangle AEB$   $AB = a\sqrt{5}$ . Из  $\triangle MBA$   $\operatorname{tg}MBA = \frac{\sqrt{5}}{5}$ . 7.  $30^\circ$ .

**Таблица 10.22.** 2.  $30^\circ$ . Решение. Из  $\triangle BAC$  ( $\angle A = 30^\circ$ ):  $BC = 25$ ,  $AD = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$ . Из  $\triangle AOD$   $\sin ADO = 0,5$ ,  $\angle ADO = 30^\circ$ . 3.  $60^\circ$ . 4.  $60^\circ$ . Указание. Через точку  $B$  в плоскости  $\beta$  провести прямую, параллельную прямой  $a$ , и из точки  $A$  провести перпендикуляр  $AC$  на эту прямую.  $BC = B_1A_1 = 10$ . Из  $\triangle ABC$   $AC = \sqrt{21}$ . Далее из  $\triangle AA_1C$  найти угол  $AA_1C$ . 5.  $\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Указание. Пусть

$CD = a$ , тогда  $BD = a$ ,  $AD = a\sqrt{3}$ ,  $AB = 2a$ ,  $DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Из  $\triangle CDE$   $\operatorname{tg}CED = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . 6.  $\operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha)$ . Указание. Пусть  $MO = a$ , тогда  $OC = a \operatorname{ctg} \alpha$ ,

$OE = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \alpha$ . Из  $\triangle OME$   $\operatorname{tg}MEO = \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha$ .

**Таблица 10.23.** 2.  $45^\circ$ . 3. 168. 4. 1,5Q. Решение.  $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = 3S_{BMC} \cos 60^\circ = 1,5Q$ . 5.  $45^\circ$ . 6.  $30^\circ$ .

**Таблица 10.24.** 3.  $C(3;8;2)$ . Решение.  $\overline{AD}(1;4;-5)$ ,  $\overline{BC}(x-2; y-4; z-7)$ .  $\overline{AD} = \overline{BC}$ , откуда  $x = 3$ ,  $y = 8$ ,  $z = 2$ . 6. Доказательство.  $\overline{AB}(-3;2;8)$ ,  $\overline{AC}(2;-5;2)$ ,  $\overline{AD}(-2;1;-1)$ . Так как  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0$ , то  $AB \perp AC$  и  $AB \perp AD$ , откуда прямая  $AB$  перпендикулярна плоскости  $ADC$ . 7.  $\frac{19}{3\sqrt{59}}$ .

8. 1)  $\sqrt{7}$ ; 2)  $\sqrt{3}$ ; 3) 4. Указание. 1)  $|\overline{a} + \overline{b}| = \sqrt{(\overline{a} + \overline{b})^2} = \sqrt{\overline{a}^2 + \overline{b}^2 + 2\overline{a}\overline{b}} = \sqrt{|\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 + 2|\overline{a}||\overline{b}|\cos 60^\circ}$ . 8.  $-4 - \sqrt{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ . Указание.  $(\overline{a} + \overline{c})(\overline{b} - \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c} - \overline{c} \cdot \overline{c} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos 120^\circ - |\overline{a}||\overline{c}|\cos 45^\circ + |\overline{b}||\overline{c}|\cos 150^\circ - |\overline{c}|^2$ .

**Стереометрия. 11 класс.**

**Таблица 11.1.** 2.  $120^\circ$ . 3. 9. Решение. Через точку  $A_1$  в плоскости  $A_1B_1V$  проведем прямую, перпендикулярную прямой  $MN$ , и отложим на ней отрезок  $A_1C = 5$ . Из  $\triangle AA_1C$   $AC = 7$ . Из  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ )  $AB = 9$ .

Ответы, указания, решения

4.  $\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$ . Решение. Пусть  $AB = a$ . Из  $\triangle ABC$   $AC = \frac{a}{\sin\alpha}$ . Из  $\triangle ACD$  ( $\angle C = 90^\circ$ )  $AD = \frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha\sin\beta}$ . Из  $\triangle ADB$   $\sin ADB = \frac{AB}{AD} = \sin\alpha\sin\beta$ .

5.  $\arccos \frac{1}{3}$ . Решение. Проведем прямую  $AE$  перпендикулярно ребру  $b$ .  $\triangle AES = \triangle ADS$  (по гипотенузе и острому углу), откуда  $AD = AE$ .  $\triangle AOD = \triangle AOE$  (по катету и гипотенузе), откуда  $OE = OD$ , т.е. точка  $O$  равноудалена от сторон  $\angle(bc)$ , откуда  $SO$  – биссектриса этого угла. Пусть  $OD = a$ . Из  $\triangle SOD$   $SD = a\sqrt{3}$ . Из  $\triangle ASD$   $AD = SD\sqrt{3} = 3a$ . Из  $\triangle AOD$   $\cos ADO = \frac{OD}{OA} = \frac{1}{3}$ . 6.  $\arccos \frac{3}{4}$ . Решение.  $\triangle SAB = \triangle SAC$  (по катету и острому углу), откуда  $SB = SC$ ,  $AB = AC$ . Пусть  $AB=AC=a$ . Из  $\triangle ABC$   $BC = a$ . Из  $\triangle ABS$  ( $\angle A = 90^\circ$ )  $SB = a\sqrt{2}$ . Из  $\triangle SBC$   $\cos BSC = \frac{2a^2 + 2a^2 - a^2}{4a^2} = \frac{3}{4}$ .

**Таблица 11.2.** 1. 1) 108; 2) 148. 2.  $8(3+10\sqrt{3})$ . 3. 5. 4. 916. 5.  $\sqrt{57}$ ; 5. 6.  $4(54+55\sqrt{3})$ . Указание. Провести  $A_3B \perp A_1A_2$ . Тогда  $A_1B = \frac{14+4}{2} = 9$ ,  $A_2B = 5$ . Из  $\triangle A_1A_1A_3$  ( $\angle A_1 = 90^\circ$ )  $A_1A_3 = 15$ .

**Таблица 11.3.** 1. 1) 60; 2) 78. 2. 1) 36; 2)  $4(9+2\sqrt{3})$ . 3. 1) 48; 2)  $12(4+\sqrt{3})$ . 4. 1)  $216\sqrt{2}$ ; 2)  $72(2+3\sqrt{2})$ . 5. 1)  $72\sqrt{6}$ ; 2)  $36(3+2\sqrt{6})$ . 6. 1)  $\frac{3}{2}a^2\sin 2\alpha$ ; 2)  $\frac{a^2}{2}(3\sin 2\alpha + \sqrt{3}\cos^2\alpha)$ .

**Таблица 11.4.** 1. 1) 1024; 2) 1536. Указание. Пусть  $A_1A_4 = a$ , тогда  $A_1A_3 = a\sqrt{2}$ . Из  $\triangle A_1A_1A_3$   $a^2 + 2a^2 = 768$ ,  $a = 16$ . 2. 1)  $4a^2\sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$ ; 2)  $2a^2\sin\alpha(\sin\alpha + 2\sqrt{\cos 2\alpha})$ . Указание. Из  $\triangle A_1A_2A_4$   $A_1A_2 = a\sin\alpha$ ,  $A_1A_4 = a\cos\alpha$ . Из  $\triangle A_1A_1A_4$  ( $\angle A_1 = 90^\circ$ )  $A_1A_1 = \sqrt{a^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha} = a\sqrt{\cos 2\alpha}$ . 3.  $384\sqrt{3}$ ; 2)  $576\sqrt{3}$ . 4. 1)  $6l^2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ ; 2)  $2l^2\sin\frac{\alpha}{2}(3\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2})$ . Указание. Из  $\triangle A_1A_2A_3$ :  $A_2A_3 = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$ . Из  $\triangle A_1A_1A_3$ :  $A_1A_1 = \sqrt{l^2 - 4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = l\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ .

Ответы, указания, решения

5. 1)  $\frac{4l^2 \sin 2\alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$ ; 2)  $\frac{4l^2}{1 + \cos^2 \alpha} (\sin 2\alpha + \cos^2 \alpha)$ . Решение. Пусть  $A_1 A_2 = a$ . Тогда

$$A_1 O = A_2 O = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Из } \triangle A_2' A_2 O: A_2' O = \frac{a\sqrt{2}}{2 \cos \alpha}. \text{ Из } \triangle A_2' O A_1 (\angle O = 90^\circ)$$

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2 \cos \alpha}\right)^2 = l^2, a = \frac{\sqrt{2} l \cos \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}. \text{ Из } \triangle A_2' A_2 O: A_2' A_2 = \frac{\sqrt{2} l \sin \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}},$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{4\sqrt{2} l \cos \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}} \cdot \frac{\sqrt{2} l \sin \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}} = \frac{4l^2 \sin 2\alpha}{1 + \cos^2 \alpha}, S_{\text{полн}} = \frac{4l^2 \sin 2\alpha}{1 + \cos^2 \alpha} + \frac{4l^2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}.$$

6. 1)  $\frac{6h^2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$ ; 2)  $\frac{2h^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \left(3\sqrt{1 + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}\right)$ . Решение.

$$\text{Пусть } A_1 A_2 = a. \text{ Из } \triangle A_1 A_2' A_3: A_2' A_3 = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}. \text{ Из } \triangle A_3 A_2' A_2: a^2 + \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = h^2,$$

$$a = \frac{2h \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}. S_{\text{бок}} = 3ah, S_{\text{полн}} = 3ah + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} (6h + a\sqrt{3}).$$

**Таблица 11.5.** 1. 76. 2. 300. 3.  $20(1 + \sqrt{3})$ . 4. 252. Указание.  $\angle A_3' A_3 A_4 = 90^\circ$  (по теореме о трех перпендикулярах), откуда  $A_3' A_3 A_4 A_4'$  – прямоугольник.

5.  $108(2 + \sqrt{7})$ . Решение. Через точку  $A_1$  проведем прямую  $l$ , параллельную  $A_2 A_3$ .  $A_1 C \perp l$ . Тогда по теореме о трех перпендикулярах  $A_1' A_1 \perp l$ . Так как  $A_1' A_1 \parallel A_3 A_3'$  и  $A_2 A_3 \parallel l$ , то  $\angle A_3' A_3 A_2 = 90^\circ$ , т.е.  $A_3' A_3 A_2 A_2'$  – прямоугольник. Из  $\triangle A_1' A_1 O$   $A_1' O = 6\sqrt{3}$ , откуда  $A_1 A_3 = 18$ . Из  $\triangle A_1' A_1 B$   $A_1' B = \sqrt{63}$ .  $S_{\text{бок}} = 2 \cdot 18 \cdot \sqrt{63} + 12 \cdot 18 = 108(2 + 3\sqrt{7})$ . 6.  $36(2 + \sqrt{3})$ . Решение.

$\angle A_1' A_1 A_2 = 90^\circ$  (по теореме о трех перпендикулярах), откуда  $A_1' A_1 A_2 A_3$  – прямоугольник. Из  $\triangle A_1' A_1 O$   $A_1' O = A_1 O = 3\sqrt{2}$ . Тогда  $A_1 A_4 = 6$ . Из  $\triangle A_1' O B$   $A_1' B = 3\sqrt{3}$ .  $A_1' B \perp A_1 A_4$  (по теореме о трех перпендикулярах), тогда  $S_{\text{бок}} = 2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} + 2 \cdot 6 \cdot 6 = 36(2 + \sqrt{3})$ .

**Таблица 11.6.** 1.  $2\sqrt{57}$ ; 10. 2.  $4\sqrt{3}(15 + 16\sqrt{10})$ . 3. 426. Указание. Пусть  $AA_1 = x$ ,  $AD = y$ ,  $AB = z$ . Тогда  $x^2 + y^2 = 106$ ,  $x^2 + z^2 = 169$ ,  $y^2 + z^2 = 225$ . Сложив три уравнения, получим  $2(x^2 + y^2 + z^2) = 500$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 250$ , откуда  $x^2 = 25$ ,  $y^2 = 81$ ,  $z^2 = 144$ ,  $AA_1 = 5$ ,  $AD = 9$ ,  $AB = 12$ . 4.  $2d^2 \cos \alpha (\cos \alpha \sin \beta + 2 \sin \alpha)$ . Решение. Из  $\triangle DC_1 C$  ( $\angle C = 90^\circ$ )  $C_1 C = d \sin \alpha$ ,  $CD = d \cos \alpha$ .  $S_{ABCD} =$

Ответы, указания, решения

$$= d^2 \cos^2 \alpha \sin \beta. S_{\text{бок}} = 4d^2 \cos \alpha \sin \alpha. 5. \frac{d^2}{\sin \frac{\alpha}{2}} (\sin 2\beta + \cos^2 \beta \cos \frac{\alpha}{2}). \text{Решение. Из}$$

$$\Delta BB_1D (\angle B = 90^\circ) BD = d \cos \beta, B_1B = d \sin \beta. \text{Из } \Delta ABD AB = \frac{d \cos \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}. S_{ABCD} = \\ = \frac{d^2 \cos^2 \beta}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \sin \alpha = \frac{1}{2} d^2 \cos^2 \beta \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}. S_{\text{бок}} = \frac{4d \cos \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot d \sin \beta = \frac{d^2 \sin 2\beta}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$6. 2d^2 (\sin \beta \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta} + \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}). \text{Решение. Из } \Delta BB_1D BB_1 = d \sin \alpha, BD = d \cos \alpha. \text{Из } \Delta B_1C_1D B_1C_1 = d \sin \beta. \text{Из } \Delta ABD (\angle A = 90^\circ) AB = \sqrt{d^2 \cos^2 \alpha - d^2 \sin^2 \beta}. S_{ABCD} = d^2 \sin \beta \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}. \\ S_{\text{бок}} = 2d^2 \sin \alpha (\sin \beta + \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}).$$

**Таблица 11.7.** 1. Указание. Через точку  $P$  провести прямую, параллельную  $KF$ . Она пересекает отрезок  $A_2A_2'$  в точке  $M$ .  $KMPF$  – искомое сечение. 2. Указание. Прямая  $KF$  пересекает прямую  $A_2A_3$  в точке  $V$ . Прямая  $VP$  пересекает  $A_1A_3$  в точке  $M$ .  $KPMF$  – искомое сечение. 3. Указание. Прямые  $KF$  и  $KP$  пересекают прямые  $A_1A_2$  и  $A_2A_3$  в точках  $B$  и  $C$  соответственно. Прямая  $BC$  пересекает отрезки  $A_1A_4$  и  $A_3A_4$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно.  $KPEDF$  – искомое сечение. 4. Указание. Через точки  $K$  и  $P$  проведем прямую, пересекающую прямые  $A_1A_1'$  и  $A_1'A_4'$  в точках  $B$  и  $A$  соответственно. Через точки  $A$  и  $F$  проведем прямую, пересекающую прямые  $A_4'A_3'$  и  $A_1'A_2'$  в точках  $M$  и  $C$  соответственно. Прямая  $BC$  пересекает  $A_1A_2$  и  $A_2A_2'$  в точках  $N$  и  $E$  соответственно.  $NEFMPK$  – искомое сечение.

**Таблица 11.8.** 1. 54. 2. 48. Указание.  $S_{\text{бок}} = \frac{S_{ABCD}}{\cos 60^\circ}$ . 3. 336. Указание. Из

$\Delta SOC OC = \sqrt{72}$ . Тогда  $CD = 12$ . Проведем  $SE \perp CD$ . Из  $\Delta SEC SE = 8$ .

$$4. \frac{3a}{2} (2\sqrt{4b^2 - a^2} + a\sqrt{3}). \text{Указание. Провести } SK \perp CD. \text{Из } \Delta SCK$$

$$SK = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2}. 5. \frac{3\sqrt{3}h^2 \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha}. \text{Указание. Из } \Delta SOE OE = h \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\text{Из } \Delta ABC AC = 2\sqrt{3} OE. S_{\text{бок}} = \frac{S_{ABC}}{\cos \alpha}. 6. \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} (1 + \sqrt{4 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}). \text{Указание.}$$

Ответы, указания, решения

Из  $\triangle ABC$   $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,  $OE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ . Из  $\triangle SOA$   $SO = AO \operatorname{ctg}\alpha$ . Из  $\triangle SOE$   $SE = \sqrt{SO^2 + OE^2}$ .

**Таблица 11.9.** 1.  $8(\sqrt{3} + \sqrt{6})$ . Указание.  $S_{\text{бок}} = \frac{S_{ABCD}}{\cos 45^\circ}$ . 2.  $8(11+3\sqrt{2})$ . 3. 5. Указание. Т.к.  $SA = SB = SC$ , то  $OA = OB = OC$ , т.е. точка  $O$  – центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ . Тогда  $AO = \frac{AB}{2 \sin 150^\circ}$ . 4.  $3\sqrt{7}$ . Решение. Из

$\triangle SAO$   $AO = 4$ . Из  $\triangle ABC$  по теореме синусов  $AO = R = \frac{BC}{2 \sin BAC}$ , откуда  $\sin BAC = \frac{3}{4}$ . Тогда  $\cos BAC = \frac{\sqrt{7}}{4}$ . Из  $\triangle ABD$   $AD = AB \cos BAD = \frac{3\sqrt{7}}{2}$ ,  $AC = 2AD = 3\sqrt{7}$ . 5.  $39(1+\sqrt{2})$ . Указание.  $OE = r = 0,5\sqrt{AB \cdot CD} = 3$ .  $SO = OE = 3$ .  $S_{ABCD} = (9+4) \cdot 3 = 39$ .  $S_{\text{бок}} = \frac{S_{ABCD}}{\cos 45^\circ}$ . 6.  $\frac{a^2 \sin 2\alpha \cos^2 \frac{\beta}{2}}{2 \cos \beta}$ .

Указание. Из  $\triangle ABC$   $AC = a \cos \alpha$ .  $S_{ABC} = \frac{1}{2} a^2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\alpha$ . Так как  $O$  – точка пересечения биссектрис  $\triangle ABC$ , то точка  $O$  – центр окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ . Тогда  $S_{\text{бок}} = \frac{S_{ABC}}{\cos \beta}$ .

**Таблица 11.10.** 1. 252. Указание. Провести  $SD \perp CB$ . Из  $\triangle ADB$   $AD = 12$ , из  $\triangle SAD$   $SA = 15$ . 2.  $18(3+3\sqrt{3} + \sqrt{6})$ . Указание. Из  $\triangle ABC$   $AC = 6\sqrt{3}$ ,  $AB = 12$ . Из  $\triangle SAC$   $SA = 6\sqrt{3}$ ,  $CS = 6\sqrt{6}$ .  $\angle SCB = 90^\circ$  (по теореме о трех перпендикулярах). 3.  $48(1+\sqrt{3})$ . 4.  $36(3+2\sqrt{3})$ . Указание. Из  $\triangle ABC$   $AB = 12\sqrt{3}$ . Из  $\triangle ACD$   $AD = AC \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$ . Из  $\triangle SAD$   $SA = 6$ ,  $CD = 12$ . 5.  $18(3+3\sqrt{3} + \sqrt{6})$ . Решение. Пусть  $SA = a$ , тогда  $AB = CD = a$ ,  $SD = 2a$ . Из  $\triangle SDC$  ( $\angle D = 90^\circ$ )  $4a^2 + a^2 = 36 \cdot 5$ ,  $a = 6$ .  $SA = AB = 6$ ,  $AD = 6\sqrt{3}$ ,  $SB = 6\sqrt{2}$ ,  $SD = 12$ .  $S_{\text{полн}} = 36\sqrt{3} + 18\sqrt{3} + 36 + 18\sqrt{6} + 18 = 54\sqrt{3} + 18\sqrt{6} + 54$ . 6.  $l^2(\cos^2 \alpha + 0,5 \sin 2\alpha + \cos \alpha \sqrt{-\cos 2\alpha})$ . Решение. Из  $\triangle SCB$  ( $\angle B = 90^\circ$ )  $SB = l \sin \alpha$ ,  $BC = l \cos \alpha$ . Из  $\triangle SAB$   $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = l \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = l \sqrt{-\cos 2\alpha}$ .  $S_{\text{полн}} = l^2 \cos^2 \alpha + 0,5 l^2 \sin \alpha \cos \alpha + 0,5 l^2 \sin \alpha \cos \alpha + 0,5 l^2 \sqrt{-\cos 2\alpha} \cos \alpha + 0,5 l^2 \sqrt{-\cos 2\alpha} \cos \alpha$ . Замечание. Так как  $SB > AB$ ,  $AB = BC$ , то  $SB > BC$ . Из  $\triangle SBC$  ( $\angle B = 90^\circ$ )  $\operatorname{tg} \alpha > 1$ , откуда  $\alpha > 45^\circ$ ,  $2\alpha > 90^\circ$ , и  $-\cos 2\alpha > 0$ .

Ответы, указания, решения

**Таблица 11.11.** 1.  $10(29 + \sqrt{61})$ . Указание. Из  $\triangle SOC$   $SO = 12$ . Проведем  $OE \perp AB$ . Из  $\triangle SOE$   $SE = 2\sqrt{61}$ .  $\angle SDA = \angle SCB = 90^\circ$  (по теореме о трех перпендикулярах). 2.  $24(1 + 2\sqrt{3})$ . Указание. Из  $\triangle SOD$   $OD = 2\sqrt{3}$ . Из  $\triangle OCD$  ( $\angle D = 90^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$ )  $OC = 4$ , откуда  $AC = 8$ .  $S_{ABC} = 16\sqrt{3}$ .  $S_{SBC} = S_{SAB}$ .  $\triangle OBC$  – ортогональная проекция  $\triangle SBC$  на плоскость  $ABC$ . Тогда  $S_{SAB} + S_{SBC} = \frac{S_{ABC}}{\cos 60^\circ} = 16\sqrt{3} \cdot 2 = 32\sqrt{3}$ .  $S_{ASC} = 24$ . 3.  $36(4 + 2\sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{15})$ .

Указание. Из  $\triangle ABC$   $AB = 24$ ,  $BC = 12\sqrt{3}$ .  $AO = OB = 12$ . Из  $\triangle SOB$   $SO = 12$ ,  $SB = 12\sqrt{2}$ . Проведем  $SD \perp BC$  и  $SE \perp AC$ . Тогда  $D$  и  $E$  – середины сторон  $BC$  и  $AC$  соответственно. Из  $\triangle SDB$   $SD = \sqrt{SB^2 - DB^2} = 6\sqrt{5}$ . Из  $\triangle SEC$   $SE = 6\sqrt{7}$ . 4.  $14\sqrt{23}$ . 5.  $5\sqrt{3} + 18\sqrt{2}$ . 6.  $99\sqrt{3}$ . Указание. Проведем  $CE \perp A_1B$ .  $CE$  – высота усеченной пирамиды.  $BE = r_1 - r_2 = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$ , где  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы окружностей, вписанных в  $\triangle A_1A_2A_3$  и  $\triangle A_1'A_2'A_3'$  соответственно. Из  $\triangle CBE$   $CB = 2$ .  $CB$  – высота боковой грани усеченной пирамиды.

**Таблица 11.12.** 1. Указание. Т.к.  $PM \parallel AB$ , то плоскость сечения пересекает плоскость  $ABC$  по прямой  $KE$ , параллельной  $AB$ . 2. Указание. Провести прямую  $MK$  до пересечения с прямой  $AC$  (точка  $D$ ). Прямая  $DP$  пересекает  $AB$  в точке  $E$ .  $PKME$  – искомое сечение. 3. Указание. Провести прямую  $MP$  до пересечения с прямой  $DC$  (точка  $F$ ). Прямая  $FK$  пересекает прямые  $AD$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $T$  соответственно. Прямая  $TM$  пересекает прямую  $SB$  в точке  $N$ .  $KNMPE$  – искомое сечение. 4. Указание. Проведем прямые  $KP$  и  $MK$  до пересечения с прямыми  $CD$  и  $AD$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Прямая  $EF$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $T$ . Прямая  $TP$  пересекает прямую  $SB$  в точке  $L$ .  $MKPL$  – искомое сечение.

**Таблица 11.13.** 2.  $18\sqrt{6}$ . Указание. Из  $\triangle OEO_1$   $OE = 3\sqrt{2}$ . Из  $\triangle COE$   $CE = 3\sqrt{6}$ .  $DC = 2CE = 6\sqrt{6}$ . 3. 3. Указание. Искомое расстояние равно

длине перпендикуляра  $OE$  к отрезку  $CD$ . 4.  $\frac{l\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ ;  $\frac{l \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$

Решение. Проведем  $O_1E \perp CD$ . Из  $\triangle O_1DE$   $DE = l \sin \frac{\beta}{2}$ . Из  $\triangle ODE$  ( $\angle D = 90^\circ$ )

$$OD = R = \frac{l \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \text{ Из } \triangle O_1OD \text{ } OO_1 = h = \frac{l}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$



Ответы, указания, решения

5.  $4R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$ . Решение. Из  $\triangle C_1 O_1 D_1$   $C_1 D_1 = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$ . Из  $\triangle C D_1 D$  ( $\angle D = 90^\circ$ )

$$D D_1 = C D \operatorname{tg} \beta = 2R \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta. S_{C C_1 D_1 D} = 4R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta. \quad 6. \frac{2d^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}{1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta}.$$

Решение. Пусть  $OO_1 = a$ . Из  $\triangle OO_1 E$   $OE = a \operatorname{ctg} \alpha$ . Из  $\triangle OCE$   $CE = OE \operatorname{ctg} \beta$ .  $CD =$

$$2CE = 2a \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta. \text{ Из } \triangle C C_1 D \quad a^2 + 4a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta = d^2. \quad a^2 = \frac{d^2}{1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta}.$$

$$S_{C C_1 D_1 D} = 2a^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{2d^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}{1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta}.$$

**Таблица 11.14.** 2.  $25\pi$ . 3.  $45^\circ$ . Решение. Из  $\triangle COE$   $OE = 8\sqrt{3}$ . Из  $\triangle SOE$   $\operatorname{tg} \angle SEO = 1$ ,  $\angle SEO = 45^\circ$ . 4.  $9\sqrt{15}$ . Решение. Из  $\triangle ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ )  $CB = 12$ , тогда  $OC = 6$ . Из  $\triangle SOC$   $SC = 12$ . Проведем  $SE \perp AC$ . Из  $\triangle SEC$

$$ES = \sqrt{SC^2 - EC^2} = 3\sqrt{15}. S_{ASC} = 9\sqrt{15}. \quad 5. \frac{h^2 \sin \alpha}{2 \sin^2 \beta}. \quad 6. \frac{m^2}{2 \sin 2\alpha}.$$

**Таблица 11.15.** 1.  $l \sin \alpha \sin \beta$ ;  $l \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$ . Решение. Из  $\triangle SBD$  ( $\angle D = 90^\circ$ )

$$SB = l \sin \alpha. \text{ Из } \triangle SOD \quad SO = l \sin \alpha \sin \beta. \text{ Из } \triangle SOC \quad OC = \sqrt{SC^2 - SO^2}.$$

$$2. \frac{2a^2 \operatorname{tg} \alpha}{\sin \beta \sin 2\beta}. \text{ Решение. Из } \triangle ODE \quad OE = \frac{a}{\sin \beta}. \text{ Из } \triangle SOE \quad SE = \frac{a}{\sin \beta \cos \beta} =$$

$$= \frac{2a}{\sin 2\beta}. \text{ Из } \triangle COE \quad CE = OE \operatorname{tg} \alpha = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{\sin \beta}. S_{BSC} = \frac{2a^2 \operatorname{tg} \alpha}{\sin \beta \sin 2\beta}.$$

$$3. \frac{h \sin \frac{\beta}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \alpha}}. \text{ Решение. Пусть } SB = x. \text{ Из } \triangle SBD \quad SD = x \cos \alpha, \quad BD = x \sin \alpha.$$

$$\text{Из } \triangle OBD \quad (\angle D = 90^\circ) \quad OD = BD \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = x \sin \alpha \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}. \text{ Из } \triangle SOD \quad x^2 \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2} + h^2 =$$

$$= x^2 \cos^2 \alpha, \text{ откуда } x = \frac{h}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}}} = \frac{h}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2})}} =$$

$$= \frac{h \sin \frac{\beta}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \alpha}}. \quad 4. 30; 6\sqrt{3}. \text{ Указание. Провести } B_1 C \perp OB. \quad 5. 108\sqrt{3}.$$

Решение. Проведем  $B_1 D \perp BC$ . Из  $\triangle B_1 D B$   $B_1 D = 6\sqrt{3}$ ,  $DB = 6$ . Тогда  $CD = 18$ .

Ответы, указания, решения

$S_{CC_1B_1B} = CD \cdot B_1D = 108\sqrt{3} \cdot 0,5m^2\sin 2\alpha$ . Проведем  $B_1D \perp BC$ . Из  $\triangle CB_1D$   $B_1D = m\cos\alpha$ ,  $CD = m\sin\alpha$ .  $S_{CC_1B_1B} = CD \cdot B_1D = m^2\sin\alpha\cos\alpha = 0,5m^2\sin 2\alpha$ .

**Таблица 11.16. 1.** 144п. 3.  $\frac{m\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ . Решение. Из  $\triangle AOB$   $AO = \frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ . Из

$\triangle AO_1O$   $AO_1 = \frac{m\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ . 4. 4. Указание. Радиус  $r$  окружности, вписанной в

$\triangle ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) находится по формуле:  $r = \frac{AB + BC - AC}{2}$ . 5.  $5\sqrt{26}$ .

Указание. Из  $\triangle ABC$   $O_1C = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}}$ . 6.  $\sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4\sin^2\alpha}}$ . Указание. Из

$\triangle ABC$   $O_1A = \frac{m}{2\sin\alpha}$ .

**Таблица 11.17. 1.**  $\frac{m}{1 + \cos\alpha}$ . Решение. Проведем биссектрису  $DO_1$  угла  $SDO$  (точка  $O_1$  лежит на  $SO$ ). Тогда  $OO_1$  – радиус шара, вписанного в пирамиду.

Из  $\triangle OMD$   $OD = \frac{m}{\sin\alpha}$ . Из  $\triangle OO_1D$   $O_1D = OD \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{m \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} =$

$= \frac{m}{1 + \cos\alpha}$ . 2. 3. Решение.  $SO$  – медиана равнобедренного  $\triangle ASC$ , откуда

$SO \perp AC$ . Аналогично,  $SO \perp BD$ . Значит,  $SO$  – высота пирамиды. Из  $\triangle OCD$  ( $OC = OD = 6$ )  $OE = 3\sqrt{3}$ . Проведем  $EO_1$  – биссектрису угла  $SEO$  (точка  $O_1$  лежит на  $SO$ ). Тогда  $O_1$  – центр вписанного шара. Из  $\triangle O_1OE$   $OO_1 =$

$= OE \operatorname{tg} 30^\circ = 3$ . 3.  $2\sqrt{7}$ . Решение. Из  $\triangle ABC$   $MB = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ . Центр

описанного шара – точка  $O_1$  – середина отрезка  $MM_1$ .  $O_1M = 4$ . Из  $\triangle O_1MB$

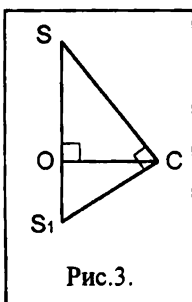


Рис.3.

$O_1B = \sqrt{O_1M^2 + MB^2} = 2\sqrt{7}$ . 4. 4. Решение. Продлим высоту  $SO$  пирамиды до пересечения с поверхностью шара (точка  $S_1$ ). Тогда  $SS_1$  – диаметр шара, откуда  $\angle SCS_1 = 90^\circ$  (рис.3). Из  $\triangle SOC$   $SC = 4\sqrt{3}$ . Из  $\triangle SCS_1$   $SS_1 = 8$ .

5.  $\frac{a\sqrt{3}}{3\sin 2\alpha}$ . Указание. Из  $\triangle ABC$   $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Продлим

высоту  $SO$  пирамиды до пересечения с поверхностью шара (точка  $S_1$ ). Тогда  $SS_1$  – диаметр шара. 6.  $10\sqrt{3}$ .

Решение.  $OC = 12\sqrt{2}$ . Из  $\triangle SOE$   $SO = OE \operatorname{tg} 60^\circ = 12\sqrt{3}$ . Рассмотрим  $\triangle SCS_1$

Ответы, указания, решения

(рис.3),  $SS_1$  – диаметр шара.  $OC^2 = SO \cdot OS_1$ , тогда  $S_1O = 8\sqrt{3}$ , а  $SS_1 = 8\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$ .

**Таблица 11.18.** 1.  $250\sqrt{3}$ . Решение. Из  $\triangle BB_1D$   $BB_1 = BD = 10$ . Из  $\triangle BCD$   $CD = 5$ ,  $BD = 5\sqrt{3}$ .  $V = 5 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 10 = 250\sqrt{3}$ . 2.  $144\sqrt{3}$ . Решение. Из  $\triangle AA_1C$   $AC = 6\sqrt{3}$ ,  $AA_1 = 6$ . Из  $\triangle BB_1D$   $BD = \sqrt{B_1D^2 - BB_1^2} = 8$ .  $ABCD$  – ромб. Тогда  $S_{ABCD} = 0,5 \cdot AC \cdot BD = 24\sqrt{3}$ .  $V = 24\sqrt{3} \cdot 6 = 144\sqrt{3}$ . 3.  $48\sqrt{3}$ . 4.  $\frac{a^3 \sin^2 \gamma \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}$ . Решение. Из  $\triangle AA_1C$   $AA_1 = a \cos \gamma$ ,  $AC = a \sin \gamma$ . Из

$$\triangle ABC \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{BC}{\sin \alpha}, \text{ откуда } BC = \frac{a \sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}. S_{ABCD} = 2S_{ABC} =$$

$$= BC \cdot AC \cdot \sin \beta = \frac{a^2 \sin^2 \gamma \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad V = \frac{a^3 \sin^2 \gamma \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

5.  $d^3 \cos \alpha \cos \beta \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}$ . Указание. Из  $\triangle AB_1D$   $AD = d \cos \alpha$ ,  $AB_1 = d \sin \alpha$ .

Из  $\triangle DB_1C$   $CD = d \cos \beta$ . Из  $\triangle BB_1C$   $BB_1 = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = d \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}$ .

6.  $a^3 \sin 2\alpha \cos \alpha$ .

**Таблица 11.19.** 1. 840. 2.  $96\sqrt{3}$  3. 80. Указание. Т.к.  $A_1A_2 = A_2A_3$ , то  $\angle A_2A_1A_3 = \angle A_2A_3A_1 = \angle A_3A_1A_4 = 30^\circ$ . Тогда  $\angle A_2A_1A_4 = 60^\circ$ . Из  $\triangle A_1A_3A_4 = A_1A_4 = 2\sqrt{3}$ ,  $A_3A_4 = 2$ . Проведем  $A_2B \perp A_1A_4$ . Из  $\triangle A_1A_2B$   $A_1B = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , тогда  $A_2A_3 = 2\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ . 4.  $abc \sin \alpha$ . 5.  $180\sqrt{2}$ . 6.  $3\sqrt{3} a^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$ . Решение. Из

$$\triangle A_1'BO \quad OB = a \cos \alpha, \quad A_1'O = a \sin \alpha. \text{ Тогда } A_1A_2 = 2\sqrt{3} a \cos \alpha,$$

$$V = \frac{12a^2 \cos^2 \alpha \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot a \sin \alpha = 3\sqrt{3} a^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

**Таблица 11.20.** 1.  $180\sqrt{3}$ . Указание.  $A_1O = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12$ . 2.  $48\sqrt{3}$ . Указание.

Из  $\triangle A_1A_2B$   $A_1B = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ . Тогда  $S_{A_1A_2A_3} = 48$ ,  $OB = \frac{2 \cdot 48}{10+10+12} = 3$ . Из

$\triangle SOB$   $SO = 3\sqrt{3}$ . 3. 54. Указание.  $O$  – центр окружности, описанной около  $\triangle A_1A_2A_3$ . Тогда  $A_1O = \frac{6}{2 \sin 30^\circ} = 6$ ,  $SO = 6\sqrt{3}$ . 4.  $\frac{1}{6} a^3 \sin 2\alpha \sin \alpha \operatorname{tg} \beta$ .

Указание. Из  $\triangle OA_3A_4$   $OA_3 = a \cos \alpha$ , из  $\triangle OA_3B$   $OB = a \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} a \sin 2\alpha$ .

Ответы, указания, решения

Тогда  $SO = \frac{1}{2} a \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta$ . 5.  $\frac{4}{3} l^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}$ . Указание. Из  $\triangle SA_3A_4$   $A_3A_4 = 2l \sin \frac{\alpha}{2}$ , из  $\triangle A_1SA_4$   $A_1A_4 = 2l \sin \frac{\beta}{2}$ . Тогда  $OA_3 = l \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2}}$ . Из  $\triangle SOA_3$   $SO = l \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}$ . 6.  $\frac{1}{6} a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta$ . Указание. Проведем  $A_4C \perp A_1A_2$ .  $A_4C = a \sin \alpha$ , тогда  $OB = 0,5 a \sin \alpha$ ,  $SO = 0,5 a \sin \alpha \operatorname{tg} \beta$ .  $SA_1A_2A_3A_4 = a^2 \sin \alpha$ .

**Таблица 11.21.** 1.  $3\sqrt{6}$ . 2.  $36\sqrt{2}$ . Указание. Из  $\triangle A_1SA_5$   $A_1S = 6$ . Из  $\triangle A_1A_5A_6$   $A_1A_6 = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ . Из  $\triangle A_1SO$   $SO = 2\sqrt{6}$ . 3.  $\frac{1}{3} h^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \sin \gamma$ .

4.  $\frac{2}{3} l^3 \frac{\sin^2 \beta \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}}{\sin \alpha}$ . Решение. Из  $\triangle SA_1O$   $A_1O = l \cos \beta$ ,  $SO = l \sin \beta$ . Из  $\triangle SOA_3$   $OA_3 = l \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $SA_3 = \frac{l \sin \beta}{\sin \alpha}$ . Из  $\triangle A_1SA_4$  ( $\angle A_4 = 90^\circ$ )

$$A_1A_4 = l \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}} = \frac{l}{\sin \alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}. V = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{\sin \alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} \times$$

$$\times 2l \sin \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot l \sin \beta = \frac{2}{3} l^3 \frac{\sin^2 \beta \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}}{\sin \alpha}. 5. \frac{1}{3} l \times$$

$(l^2 \cos^2 \beta - a^2) \operatorname{tg} \alpha \sin \beta$ . Решение. Из  $\triangle SA_2O$   $SO = l \sin \beta$ ,  $OA_2 = l \cos \beta$ , тогда

$A_1A_2 = 2l \cos \beta$ . Проведем  $A_4B \perp A_1A_2$ . Из  $\triangle A_1BA_4$   $A_4B = (l \cos \beta - a) \operatorname{tg} \alpha$ .

$$V = \frac{1}{3} (l \cos \beta + a)(l \cos \beta - a) \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot l \sin \beta = \frac{1}{3} l (l^2 \cos^2 \beta - a^2) \operatorname{tg} \alpha \sin \beta.$$

6.  $\frac{2}{3} m^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ . Решение. Т.к.  $SA_1 = SA_2 = SA_3$ , то  $OA_1 = OA_2 = OA_3$ , откуда  $O$  – центр окружности, описанной около  $\triangle A_1A_2A_3$  и  $\angle A_1A_2A_3 = 90^\circ$ .  $OB$  – средняя линия треугольника, тогда  $A_1A_2 = 2m$ ,  $A_2A_3 = 2m \operatorname{tg} \alpha$ . Из  $\triangle SOB$   $SO = m \operatorname{tg} \beta$ .  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} 4m^2 \operatorname{tg} \alpha \cdot m \operatorname{tg} \beta = \frac{2}{3} m^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ .

**Таблица 11.22.** 1.  $\frac{1}{12} a^3 \operatorname{ctg} \alpha$ . Решение.  $A_1O = \frac{a}{\sqrt{3}}$ . Из  $\triangle A_1SO$   $SO = \frac{a}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \alpha$ .

$V = \frac{1}{3} a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a^3 \operatorname{ctg} \alpha}{12}$ . 2.  $\frac{4}{3} \frac{h^3 \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$ . Решение. Пусть  $A_3A_4 = a$ . Проведем  $SB \perp A_3A_4$ . Из  $\triangle SA_4B$   $SB = 0,5 a \operatorname{tg} \alpha$ . Из  $\triangle SOB$

Ответы, указания, решения

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha, \text{ откуда } a = \frac{2h \cos \alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}. V = \frac{1}{3} \cdot \frac{4h^3 \cos^2 \alpha}{-\cos 2\alpha}. \text{ Замечание.}$$

Поскольку  $\angle A_4 S A_3 < \angle A_4 O A_3$ , то  $\angle A_4 S A_3 < 90^\circ$ , тогда  $\alpha > 45^\circ$  и  $\cos 2\alpha < 0$ .

$$3. \frac{l^3 \sqrt{12 + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}}{(4 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}. \text{ Решение. Пусть } A_1 A_3 = a, \text{ тогда } OB = \frac{a}{2\sqrt{3}}, AO = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Из  $\triangle SOB$   $SO = \frac{a}{2\sqrt{3}} \operatorname{tg} \alpha$ . Из  $\triangle SOA_1$   $\frac{1}{12} a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{3} a^2 = l^2$ , откуда

$$a = \frac{2\sqrt{3}l}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 4}}. V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{2\sqrt{3}} = \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{24}. 4. 126\sqrt{3}. \text{ Решение. Пусть}$$

$O$  и  $O_1$  – центры нижнего и верхнего оснований усеченной пирамиды соответственно. Проведем  $A_1' C \perp A_1 B$ .  $A_1 C = R - R_1 = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ , где  $R$  и  $R_1$  – радиусы окружностей, описанных около нижнего и верхнего оснований соответственно. Из  $\triangle A_1 A_1' C$   $A_1' C = 6$ .  $V = \frac{1}{3} \cdot 6(36\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 18\sqrt{3}) =$

$$= 126\sqrt{3}. 5. \frac{1}{3} l \sin \alpha (3a^2 + 6al \cos \alpha + 4l^2 \cos^2 \alpha). \text{ Решение. Проведем } B_1 C \perp OB.$$

Из  $\triangle B_1 B C$   $B_1 C = l \sin \alpha$ ,  $BC = l \cos \alpha$ ,  $A_1 A_4 = a + 2l \cos \alpha$ .  $V = \frac{1}{3} \cdot l \sin \alpha \times$

$$\times \left( a^2 + (a + 2l \cos \alpha)^2 + a(a + 2l \cos \alpha) \right) = \frac{1}{3} \cdot l \sin \alpha (3a^2 + 6al \cos \alpha + 4l^2 \cos^2 \alpha).$$

6.  $\frac{1}{24} (a^3 - b^3) \operatorname{tg} \alpha$ . Решение. Проведем  $B_1 C \perp A_2 B$ .  $BC = r - r_1$ , где  $r$  и  $r_1$  – радиусы окружностей, вписанных в нижнее и верхнее основания усеченной пирамиды соответственно.  $BC = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}$ . Из  $\triangle BB_1 C$   $B_1 C = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha$ .  $V$

$$= \frac{1}{18} (a-b)\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{ab\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{1}{24} (a^3 - b^3) \operatorname{tg} \alpha.$$

**Таблица 11.23.** 1.  $64\sqrt{3} \pi$ ;  $32\sqrt{3} \pi$ . 2.  $9000 \pi$ ;  $600\sqrt{3} \pi$ .

$$3. \frac{3200\sqrt{3}}{3} \pi; \frac{640\sqrt{3}}{3} \pi. 4. \pi l^3 (\sin^2 \beta \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \sin \alpha \sin \beta; 2 \pi l^2 \sin \alpha \sin \beta \times$$

$\times \sqrt{\sin^2 \beta \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}$ . 5.  $0,5\pi Q \sqrt{2Q \operatorname{ctg} \alpha}$ ;  $2\pi Q$ . Указание.  $CD = 2R$ , тогда из  $\triangle CD_1 D$   $DD_1 = 2R \operatorname{tg} \alpha$ .  $4R^2 \operatorname{tg} \alpha = Q$ , откуда  $R = \sqrt{0,5Q \operatorname{ctg} \alpha}$ ,  $DD_1 = H =$

Ответы, указания, решения

$= \sqrt{2Q} \operatorname{tg} \alpha$  6.  $2\sqrt{2} \pi a^3 \operatorname{tg} \alpha$ ;  $4\pi a^2 \operatorname{tg} \alpha$ . Указание. Т.к.  $CD$  – диаметр, то  $\angle CAD = 90^\circ$ .

**Таблица 11.24.** 1.  $24\pi$ ;  $8\sqrt{3}\pi$ . 2.  $\frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$ ;  $\pi l^2 \cos \alpha$ . 3.  $720\pi$ ;  $36\sqrt{41}\pi$ . Указание.  $\triangle A_1SO_1 \sim \triangle ASO$ . 4.  $\frac{\pi Q \sqrt{Q}}{3 \cdot 4\sqrt{3}}$ ;  $\frac{2\pi Q \sqrt{3}}{3}$ . 5.  $\frac{74\sqrt{3}}{3}\pi$ ;  $7\sqrt{37}\pi$ . 6. 1)  $32\sqrt{3}\pi$ ;  $24\sqrt{5}\pi$ ; 2)  $36\pi$ ;  $18\sqrt{5}\pi$ . Указание. 2) Пусть  $SO = h$ , тогда из  $\triangle SOD$   $OD = h$ ,  $SD = h\sqrt{2}$ . Из  $\triangle COD$  ( $\angle D = 90^\circ$ )  $OC = 2OD = 2h$ ,  $CD = h\sqrt{3}$ . Из  $\triangle SDB$   $3h^2 + 2h^2 = 45$ ,  $h = 3$ .

**Таблица 11.25.** 1.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}{24 \sin^3 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}$ ;  $\frac{\pi a^2}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}$ . Указание. Из  $\triangle COB$

$OB = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ . Из  $\triangle SCB$   $SB = \frac{a}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$ . Из  $\triangle SOB$   $SO = \frac{a \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}$ .

2.  $\frac{1}{3}\pi l^3 \left( \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)^2 \sqrt{\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}$ ;  $\pi l^2 \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2}}$ . Указание.

$\angle DCB = 90^\circ$ . 3.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3 - 4 \cos^2 \alpha}}{18\sqrt{3} \cos \alpha}$ ;  $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{b \cos \alpha}$ . Указание.  $OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Из  $\triangle ESC$

$SC = \frac{a}{2 \cos \alpha}$ . Из  $\triangle SOC$   $SO = \sqrt{\frac{a^2}{4 \cos^2 \alpha} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{2 \cos \alpha} \sqrt{\frac{3 - 4 \cos^2 \alpha}{3}}$ .

4.  $\frac{784\sqrt{3}\pi}{3}$ ;  $128\pi$ . Указание. Проведем  $B_1C \perp OB$ .  $CB = 4$ . Из  $\triangle B_1CB$

$B_1C = 4\sqrt{3}$ ,  $B_1B = 8$ . 5.  $63\sqrt{3}\pi$ ;  $54\pi$ . Указание. Из  $\triangle CB_1B$   $CB = 12$ ,  $CB_1 = 6\sqrt{3}$ . Проведем  $B_1D \perp BC$ . Из  $\triangle BB_1D$   $BD = 3$ ,  $B_1D = 3\sqrt{3}$ .  $B_1O_1 = 6 - 3 = 3$ .

6.  $\frac{\pi l^3 \sin \beta}{12 \sin^2 \alpha} (3 \sin^2 \beta \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta)$ ;  $\pi l^2 \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha$ . Указание. Из  $\triangle CB_1B$

$BC = \frac{l \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$ , тогда  $OB = \frac{l \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha}$ . Проведем  $B_1D \perp BC$ . Из  $\triangle BB_1D$

$B_1D = l \sin \beta$ ,  $BD = l \cos \beta$ , тогда  $O_1B_1 = \frac{l \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha} - l \cos \beta = \frac{l \sin(\beta - \alpha)}{2 \sin \alpha}$ .

*Ответы, указания, решения*

**Таблица 11.26.** 1.  $256\sqrt{3}\pi$ ;  $192\pi$ . 2.  $32\sqrt{3}\pi$ ;  $48\pi$ . Указание. Из  $\triangle ABC$   
 $O_1B = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ . 3.  $\frac{500}{3}\pi$ ;  $100\pi$ . Указание.  $OD = \frac{2S_{ABC}}{AB+BC+AC}$ .

4.  $\frac{1984}{3}\pi$ ;  $208\pi$ . 5.  $964\frac{1}{3}\pi$ ;  $220\pi$ . Указание. Объем шарового кольца найдем как разность объема шара и суммы объемов двух шаровых сегментов, высоты которых равны 6 и 3. Аналогично находится площадь сферической части шарового кольца. 6.  $1734\pi$ ;  $306\pi$ .

## Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	<b>3</b>
<b>Повторение курса планиметрии</b> .....	<b>5</b>
Таблица 1. Решение треугольников .....	5
Таблица 2. Площадь треугольника .....	6
Таблица 3. Площадь четырехугольника .....	7
Таблица 4. Площадь четырехугольника .....	8
<b>Стереометрия. 10 класс</b> .....	<b>9</b>
Таблица 10.1. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия ...	9
Таблица 10.2. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия .	10
Таблица 10.3. Параллельность прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые .....	11
Таблица 10.4. Параллельность прямых и плоскостей.....	12
Таблица 10.5. Признак параллельности плоскостей .....	13
Таблица 10.6. Свойства параллельных плоскостей.....	14
Таблица 10.7. Изображение пространственных фигур на плоскости	15
Таблица 10.8. Изображение пространственных фигур на плоскости	16
Таблица 10.9. Перпендикулярность прямой и плоскости .....	17
Таблица 10.10. Перпендикулярность прямой и плоскости.....	18
Таблица 10.11. Перпендикуляр и наклонная .....	19
Таблица 10.12. Перпендикуляр и наклонная.....	20
Таблица 10.13. Теорема о трех перпендикулярах .....	21
Таблица 10.14. Теорема о трех перпендикулярах .....	22
Таблица 10.15. Теорема о трех перпендикулярах .....	23
Таблица 10.16. Перпендикулярность плоскостей.....	24
Таблица 10.17. Перпендикулярность плоскостей.....	25
Таблица 10.18. Расстояние между скрещивающимися прямыми .....	26
Таблица 10.19. Декартовы координаты в пространстве.....	27
Таблица 10.20. Угол между скрещивающимися прямыми.....	28
Таблица 10.21. Угол между прямой и плоскостью .....	29
Таблица 10.22. Угол между плоскостями.....	30
Таблица 10.23. Площадь ортогональной проекции многоугольника	31
Таблица 10.24. Векторы в пространстве .....	32
<b>Стереометрия. 11 класс</b> .....	<b>33</b>
Таблица 11.1. Двугранный угол. Трехгранный угол .....	33
Таблица 11.2. Прямая призма .....	34
Таблица 11.3. Правильная призма .....	35
Таблица 11.4. Правильная призма .....	36
Таблица 11.5. Наклонная призма .....	37
Таблица 11.6. Параллелепипед.....	38



Таблица 11.7. Построение сечений призмы .....	39
Таблица 11.8. Правильная пирамида .....	40
Таблица 11.9. Пирамида.....	41
Таблица 11.10. Пирамида.....	42
Таблица 11.11. Пирамида. Усеченная пирамида .....	43
Таблица 11.12. Построение сечений пирамиды .....	44
Таблица 11.13. Цилиндр.....	45
Таблица 11.14. Конус .....	46
Таблица 11.15. Конус. Усеченный конус.....	47
Таблица 11.16. Шар.....	48
Таблица 11.17. Вписанный и описанный шар.....	49
Таблица 11.18. Объем параллелепипеда.....	50
Таблица 11.19. Объем призмы.....	51
Таблица 11.20. Объем пирамиды .....	52
Таблица 11.21. Объем пирамиды .....	53
Таблица 11.22. Объем пирамиды. Объем усеченной пирамиды .....	54
Таблица 11.23. Объем и площадь боковой поверхности цилиндра ..	55
Таблица 11.24. Объем и площадь боковой поверхности конуса .....	56
Таблица 11.25. Объем конуса. Объем усеченного конуса. Площадь боковой поверхности конуса. Площадь боковой поверхности усеченного конуса.....	57
Таблица 11.26. Объем шара. Площадь поверхности шара.....	58
<b>Ответы, указания, решения .....</b>	<b>59</b>