Г.П. Бевз
В.Г. Бевз
Н.Г. Владімірова
В.М. Владіміров

Геометрія

10

Підручник
для загальноосвітніх
навчальних закладів

Профільний рівень

Рекомендовано
Міністерством освіти
і науки України

КИЇВ
«ГЕНЕЗА»
2010

ШАНОВНІ СТАРШОКЛАСНИКИ!

Геометрія – одна з найдавніших, найшляхетніших, корисних і цікавих наук. У ній – згусток значної частини загальнолюдської культури, надбаної людством за кілька тисячоліть. А ще вона є незамінним інструментарієм для науковців і виробничників, засобом для розвитку логічного мислення, просторової уяви, раціоналізаторських здібностей та інших корисних якостей волі і характеру молоді.

Ось що писав про геометрію відомий архітектор XX ст. Ле Корбюзьє: «Тільки дотримуючись законів геометрії, архітектори давнини могли створити свої шедеври. Невипадково кажуть, що піраміда Хеопса – німий трактат з геометрії, а грецька архітектура – зовнішнє відображення геометрії Евкліда. Минули століття, але роль геометрії не змінилась. Як і раніше, вона залишається граматикою архітектора». І не тільки архітектора чи інженера-конструктора. Ця наука є своєрідною граматикою кожного фахівця, який використовує геометричні форми.

Геометрія складається з двох частин: *планіметрії* і *стереометрії*. У попередніх класах ви вивчали в основному планіметрію, тепер переходите до вивчення стереометрії (від грец. στερεος – просторовий), в якій розглядаються властивості геометричних фігур у просторі.

Стереометрія – геометрія тривимірного простору. За змістом вона багатша від планіметрії і цікавіша, оскільки вивчає властивості як плоских геометричних фігур, так і неплоских.

Перший розділ, за програмою, – матеріал для повторення, систематизації та узагальнення найважливіших відомостей з планіметрії.

Новий навчальний матеріал викладено в трьох розділах і додатках. Кожен з розділів містить теоретичний матеріал і задачі. Читаючи теорію, основну увагу слід звертати на слова, надруковані курсивом і жирним шрифтом. *Курсивом* виділено геометричні терміни, назви понять. Потрібно вміти пояснювати їх зміст, наводити відповідні приклади. **Жирним шрифтом** надруковано важливі геометричні твердження, зокрема теореми.

У кожному параграфі підручника є рубрика  «Для допитливих». Вона містить додаткові відомості для тих, хто хоче знати більше. У рубриці  «Виконаємо разом» наводяться задачі з розв'язаннями. Радимо переглянути їх, перш ніж виконувати домашнє завдання.

Знати геометрію – це насамперед уміти користуватися нею. Вчитися користуватися геометричними знаннями найкраще під час розв'язування геометричних задач. Завдання, рекомендовані для домашньої роботи, виділено кольором. Задачі і вправи в підручнику поділено на: «Виконайте усно», рівень А, рівень Б і «Вправи для повторення». У кожному розділі є задачі за готовими малюнками. Умови таких задач подано малюнками і короткими записами.

Для узагальнення і систематизації вивченого матеріалу подано «Головне в розділі». Перевірити, наскільки ви засвоїли новий матеріал, та підготуватися до зовнішнього незалежного оцінювання ви зможете, розв'язуючи задачі та виконуючи завдання з рубрик «Тестові завдання» і «Типові задачі для контрольної роботи».

Програмну тему «Ортоцентричний тетраедр» дещо розширено і вміщено в додатках «Елементи геометрії тетраедра». Там міститься ще кілька тем, в яких поглиблено розглядаються деякі найважливіші властивості найпростішого многогранника – тетраедра. Ці теми адресуємо для самостійного опрацювання тим учням, які мають бажання займатися посильною для початківців науково-дослідною роботою. А задачі, що є в «Додатках», можна пропонувати всім учням.

Іноді вважають, що найважливіше в геометрії – доведення теорем. Звичайно, учитися доводити теореми – справа корисна. Але не меншу роль у цій науці відіграють поняття, їх означення і класифікації; геометричні фігури, їх побудова і перетворення; геометричні величини, їх вимірювання та обчислення. Один з відомих геометрів XX ст. Д. Гільберт писав: «***У величезному саду геометрії кожний може підібрати собі букет за смаком***».

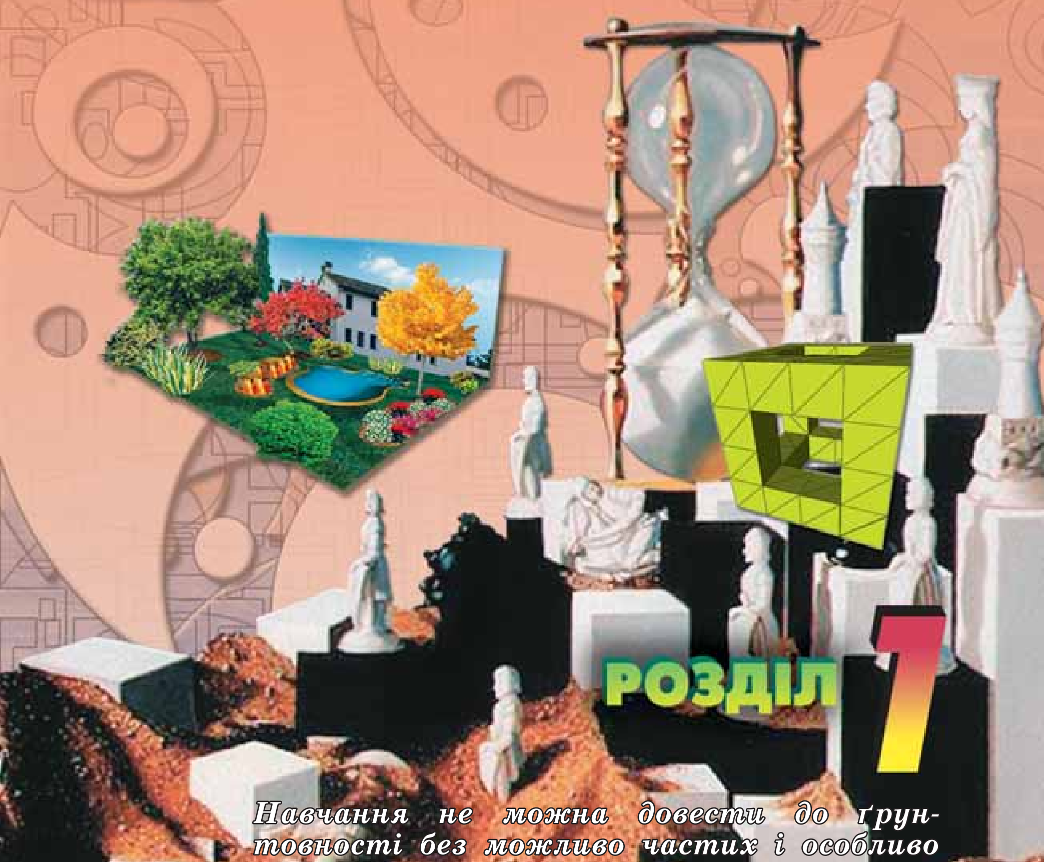
Запрошуємо вас у цей багатий і дивний світ Геометрії.

Автори

Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії

Основні теми розділу:

- **Опорні факти планіметрії.**
- **Методи розв'язування планіметричних задач.**



РОЗДІЛ 1

Навчання не можна довести до ґрунтовності без можливо частих і особливо майстерно поставлених повторень.

Я.А. Коменський

§ 1 ОПОРНІ ФАКТИ ПЛАНІМЕТРІЇ

Пригадаємо найважливіші відомості з планіметрії, які часто використовуються в стереометрії.

Аксіоми планіметрії. Основне в геометрії – її поняття і твердження. Для більшості понять формулюються означення, але існують поняття неозначувані. Це – *точка*, *пряма*, *площина* та деякі інші.

Переважну більшість геометричних тверджень доводять, тобто показують, що вони як логічні наслідки випливають з інших істинних тверджень. А як бути, коли на початку курсу ще немає «інших тверджень»? У цих випадках кілька тверджень приймають за істинні без доведень. Їх називають *аксіомами*. А доводжувані твердження – *теоремами*.

Для планіметрії, як і для інших наук чи теорій, можна обирати різні системи аксіом. Одна з них може бути такою.

1. *Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.*
2. *Через будь-які дві різні точки можна провести пряму і тільки одну.*
3. *Із трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.*
4. *Кожний відрізок має певну довжину.*
5. *Кожний кут має певну міру.*
6. *Пряма розбиває площину на дві півплощини.*
7. *На будь-якій прямій від заданої точки у заданому напрямі можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один.*
8. *Від будь-якого променя у даній півплощині можна відкласти даний кут з вершиною у початку променя і тільки один.*
9. *Який би не був трикутник, існує рівний йому трикутник у заданому розміщенні відносно заданої прямої.*
10. *Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій (аксіома Евкліда).*

Розділи про геометричні величини, геометричні перетворення і побудови потребують додаткових аксіом.

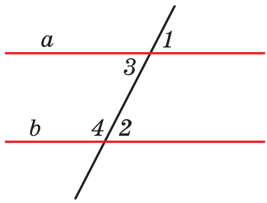
Паралельні і перпендикулярні прямі. Дві прямі однієї площини називаються паралельними, якщо вони не перетинаються. Два відрізки або промені називають паралельними, якщо вони належать паралельним прямим.

Ознаки паралельності прямих. Дві прямі a і b однієї площини паралельні (мал. 1), якщо їх січна утворює з ними:

1) рівні відповідні кути ($\angle 1 = \angle 2$); або

2) рівні внутрішні різносторонні кути ($\angle 2 = \angle 3$); або

3) внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює 180° ($\angle 3 + \angle 4 = 180°$).

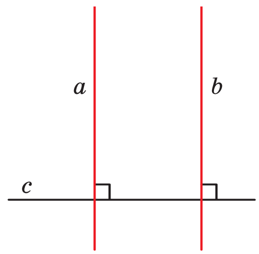


Мал. 1

Властивості паралельних прямих. Якщо прямі a і b паралельні, то виконуються всі три рівності, зазначені вище (п. 1–3).

Відношення паралельності прямих транзитивне: якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Дві прямі називаються *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Відрізки або промені називають перпендикулярними, якщо вони належать перпендикулярним прямим.



Мал. 2

Дві прямі однієї площини, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні (мал. 2). Якщо $a \perp c$ і $b \perp c$, то $a \parallel b$.

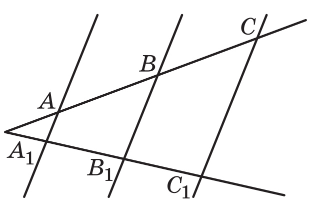
Теорема Фалеса. Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута і на одній його стороні відтинають рівні відрізки, то і на другій його стороні вони відтинають рівні відрізки (мал. 3).

Якщо $AB = BC$, то $A_1B_1 = B_1C_1$.

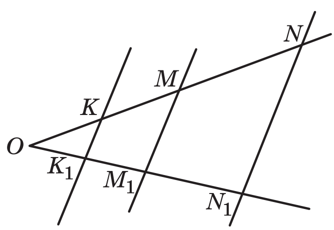
Узагальнена теорема Фалеса. Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від них пропорційні відрізки (мал. 4).

$$\frac{KM}{MN} = \frac{K_1M_1}{M_1N_1}.$$

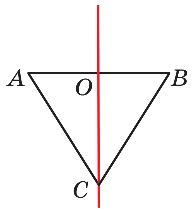
Геометричне місце точок – це множина всіх точок, які задовольняють певну умову.



Мал. 3



Мал. 4

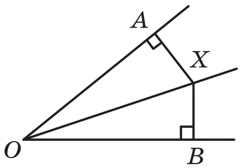


Мал. 5

Геометричним місцем точок площини, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр до цього відрізка (мал. 5).

Якщо $AO = BO$ і $CO \perp AB$, то $AC = BC$.

Геометричне місце точок кута, рівновіддалених від його сторін, – бісектриса цього кута (мал. 6).



Мал. 6

Трикутники. *Трикутник* – замкнена ламана із трьох ланок. Частина площини, обмежена такою ламаною, також називається трикутником. Кожний трикутник має три сторони, три вершини і три кути. Суму сторін трикутника називають його периметром.

Якщо сторони трикутника a, b, c, а протилежні їм кути α, β, γ, то:

$$|b - c| < a < b + c; \ \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Ознаки рівності трикутників. Два трикутники рівні, якщо:

1) дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника; або

2) сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і прилеглим до неї кутам другого трикутника; або

3) три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника.

Відрізок, який сполучає середини двох сторін трикутника, – його *середня лінія*. Середня лінія трикутника паралельна його третій стороні і дорівнює її половині.

Трикутники, в яких усі відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні, називаються *подібними*.

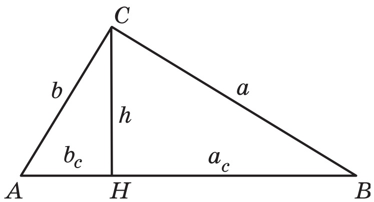
Основна теорема про подібність трикутників. Січна пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.

Ознаки подібності трикутників. Два трикутники подібні, якщо:

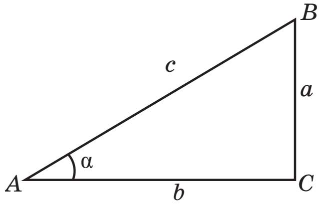
1) два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого; або

2) дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого, а кути між ними рівні; або

3) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого.



Мал. 7



Мал. 8

Два прямокутні трикутники подібні, якщо:

1) гострий кут одного трикутника дорівнює куту другого; або

2) катети одного трикутника пропорційні катетам другого; або

3) катет і гіпотенуза одного трикутника пропорційні катету і гіпотенузі другого.

З ознак подібності трикутників випливають такі теореми.

• Бісектриса трикутника ділить його протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.

• Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну медіану у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.

• Катет прямокутного трикутника – середнє пропорційне гіпотенузи c і його проекції на гіпотенузу. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, – середнє пропорційне відрізків, на які висота ділить гіпотенузу (мал. 7).

$a^2 = a_c \cdot c$; $b^2 = b_c \cdot c$; $h^2 = a_c \cdot b_c$.

Якщо c – гіпотенуза, а a, b – катети прямокутного трикутника (мал. 8), то:

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ – } \textit{теорема Піфагора};$$

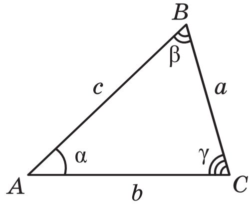
$$\frac{a}{c} = \sin\alpha; \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha; \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Якщо a, b, c – сторони, а α, β, γ – протилежні їм кути трикутника (мал. 9), то завжди

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ – *теорема косинусів*,

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ – *теорема синусів*.

Кожен з трьох останніх дробів дорівнює $2R$, де R – радіус кола, описаного навколо даного трикутника.



Мал. 9

Навколо кожного трикутника можна описати коло і до того ж тільки одне. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін. У кожний трикутник можна вписати коло і до того ж тільки одне. Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину його бісектрис.

Кожний трикутник *ABC* має медіани, бісектриси, висоти, півпериметр, радіус вписаного і описаного кіл, які відповідно позначають: m_a, l_a, h_a, p, r, R. Відомо, що:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2(b^2+c^2)-a^2\right); \quad l_a^2 = \frac{1}{(b+c)^2}bc\left((b+c)^2-a^2\right);$$

$$h_a^2 = \frac{4}{a^2}p(p-a)(p-b)(p-c); \quad r = \frac{S}{p}; \quad R = \frac{abc}{4S}.$$

Площа трикутника. Кожний трикутник (як частина площини, обмежена замкненою ламаною) має площу. Формули для визначення площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2}ah_a; \qquad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma;$$

$$S = r\cdot p; \qquad S = \frac{abc}{4R};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ – *формула Герона*.

Для прямокутних і рівносторонніх трикутників формули простіші:

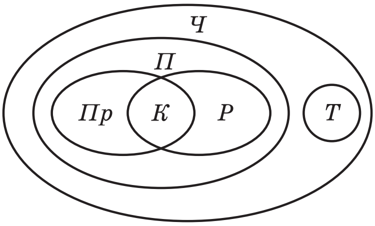
Прямокутний трикутник	Рівносторонній трикутник
$S = \frac{1}{2}ab$; $r = \frac{a+b-c}{2}$; $R = \frac{c}{2}$; $h = \frac{a\cdot b}{c}$	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Чотирикутники. *Чотирикутник* – проста замкнена ламана із чотирьох ланок. Частина площини, обмежена такою ламаною, також називається чотирикутником. Сума всіх кутів кожного чотирикутника дорівнює 360°. Кожна сторона чотирикутника менша від суми трьох інших його сторін.

Чотирикутник, кожна сторона якого паралельна протилежній стороні, – *паралелограм.*

Ознаки паралелограма. Чотирикутник є паралелограмом, якщо:

1) кожна його сторона дорівнює протилежній стороні;
2) дві його протилежні сторони паралельні й рівні;
3) його діагоналі точкою перетину діляться навпіл.



Ч — чотирикутники
П — паралелограми
Пр — прямокутники
Р — ромби
К — квадрати
Т — трапеції

Мал. 10

Властивості паралелограма:

– кожна сторона паралелограма паралельна протилежній стороні і дорівнює їй;

– кожний кут паралелограма дорівнює протилежному куту;

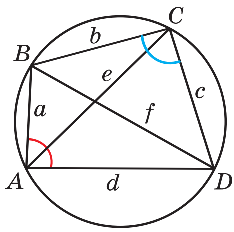
– кожна діагональ паралелограма точкою перетину ділиться навпіл;

– сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.

Окремі види паралелограмів – *прямокутники, ромби, квадрати* – мають додаткові властивості:

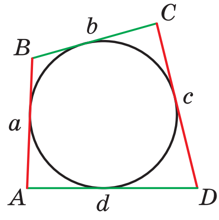
– діагоналі прямокутника (квадрата) рівні;

– діагоналі ромба (квадрата) перпендикулярні і лежать на бісектрисах його кутів.



Мал. 11

Чотирикутник, у якого тільки дві сторони паралельні, – *трапеція.* Паралельні сторони трапеції – її основи, дві інші – бічні сторони. Окремі види трапецій – рівнобічні і прямокутні трапеції. Відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції, – її *середня лінія.* Середня лінія трапеції паралельна її основам і дорівнює їх півсумі.



Мал. 12

Співвідношення між окремими видами чотирикутників показано на малюнку 10.

Вписані й описані чотирикутники (мал. 11 і 12)

Вид чотирикутника	Співвідношення між сторонами	Співвідношення між кутами
Вписаний у коло	$ac + bd = ef$	$A + C = B + D$
Описаний навколо кола	$a + c = b + d$	$ab\sin^2\frac{B}{2} = cd\sin^2\frac{D}{2}$

Площі чотирикутників. Площа прямокутника дорівнює добутку двох його сусідніх сторін: $S = ab$.

Площа паралелограма:

$$S = ah_a, \text{ або } S = ab\sin\gamma,$$

де a, b – його сторони, γ – кут між ними, h_a – висота, опущена на сторону a.

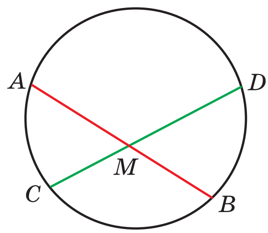
Якщо діагоналі чотирикутника дорівнюють d_1 і d_2, а кут між ними α, то його площа

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha.$$

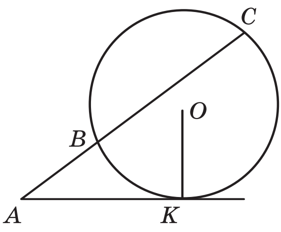
Площа ромба дорівнює $S = \frac{1}{2}d_1d_2$.

Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту:

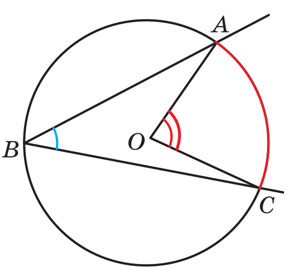
$$S = \frac{a+b}{2}h.$$



Мал. 13



Мал. 14



Мал. 15

Коло. Кути та відрізки, пов'язані з колом. Коло – фігура, що складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки – *центра кола*. Частина площини, обмежена колом, – *круг*. *Радіус* – відрізок, що сполучає будь-яку точку кола з його центром. Відрізок, що сполучає дві довільні точки кола, називають *хордою*. Хорда, що проходить через центр кола, – *діаметр*.

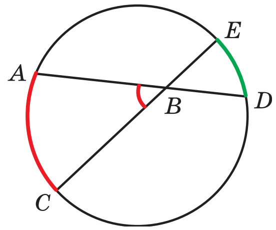
Пряма, яка має з колом тільки одну спільну точку і лежить у площині кола, називається *дотичною* до кола.

Мають місце такі властивості:

- діаметр кола, проведений через середину хорди, відмінної від діаметра, перпендикулярний до неї;
- дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику;
- відрізки дотичних, проведених до кола з однієї точки, рівні;
- $AM \cdot BM = CM \cdot DM$ (мал. 13);
- $AK^2 = AB \cdot AC$ (мал. 14);
- вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається (мал. 15):

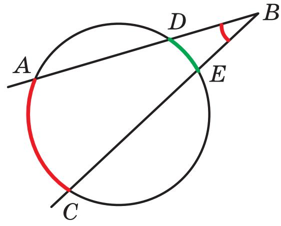
$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC};$$

- $\angle ABC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{DE})$ (мал. 16);
- $\angle ABC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} - \overset{\smile}{DE})$ (мал. 17);
- кут між хордою кола і дотичною, проведеною в її кінці, вимірюється половиною дуги, що міститься всередині кута.



Мал. 16

Довжину кола C радіуса r визначають за формулою $C = 2\pi r$. Довжину l дуги кола радіуса r, яка має n градусів, можна визначити за формулою $l = \frac{\pi r n}{180}$.



Мал. 17

Площу S круга радіуса r знаходять за формулою $S = \pi r^2$.

Частину круга, обмежену двома його радіусами, називають *сектором*, а частину круга, обмежену його хордою і дугою, – *сегментом*. Сегмент може бути меншим від півкруга або більшим. Півкруг – один з видів сектора і сегмента. Якщо сектор круга радіуса r має n градусів, то його площа $S_{\text{сек}} = \frac{\pi r^2 n}{360}$. Площа довільного сегмента дорівнює сумі або різниці площ сектора і трикутника.

Сторона a_n правильного n-кутника через радіус R описаного кола і радіус r вписаного кола виражається формулами

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \text{ і } a_n = 2r\,\text{tg}\,\frac{180^\circ}{n}.$$

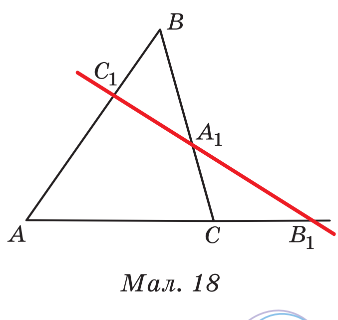
Зокрема,

$$a_3 = R\sqrt{3},\ a_4 = R\sqrt{2},\ a_6 = R.$$

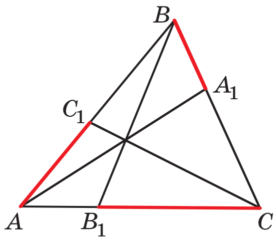
$$a_3 = 2r\sqrt{3},\ a_4 = 2r,\ a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

Теорема Птолемея. У кожному опуклому чотирикутнику $ABCD$, вписаному в коло, добуток довжин діагоналей дорівнює сумі добутків довжин його протилежних сторін, тобто $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (див. мал. 11).

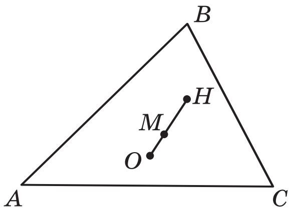
Теорема Менелая. Нехай A_1, B_1, C_1 – три точки, які лежать відповідно на сторонах BC, CA, AB $\triangle ABC$ або на їх продовженнях (мал. 18). Точки A_1, B_1, C_1 тоді і тільки тоді



Мал. 18



Мал. 19



Мал. 20

лежать на одній прямій, коли, враховуючи напрями відрізків,

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1.$$

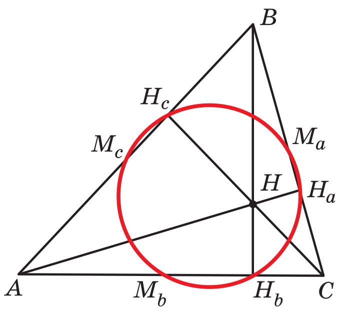
Теорема Чеви. Нехай A_1, B_1, C_1 – три точки, які лежать відповідно на сторонах BC, CA, AB $\triangle ABC$ або на їх продовженнях (мал. 19). Для того щоб прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетиналися в одній точці або були всі паралельні, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Останню рівність називають *умовою Чеви*.

Пряма Ейлера. Ортоцентр H трикутника, його центроїд M і центр O описаного кола лежать на одній прямій (мал. 20), причому $OM : MH = 1 : 2$.

Коло Ейлера (коло дев’яти точок). Основи висот трикутника, середини його сторін і середини відрізків, які сполучають ортоцентр трикутника з його вершинами, лежать на одному колі (мал. 21). Центр цього кола збігається із серединою відрізка, який сполучає ортоцентр трикутника і центр описаного кола. Його радіус дорівнює половині радіуса описаного кола.



Мал. 21

Пряма Сімсона. Основи перпендикулярів, опущених на сторони трикутника з точки описаного кола, лежать на одній прямій.

Коло Аполлонія. Геометричним місцем точок, відношення відстаней від яких до двох даних точок стале, є коло.

Координати на площині. Площину, на якій задано систему координат, називають *координатною площиною*. Кожній точці координатної площини відповідає єдина пара дійсних чисел (координати цієї точки), а кожній парі дійсних чисел – єдина точка координатної площини.

Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців. Тобто якщо кінці відрізка $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, то серединою даного відрізка є точка з координатами

$$\frac{x_1+x_2}{2} \text{ і } \frac{y_1+y_2}{2}.$$

Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Квадрат довжини відрізка дорівнює сумі квадратів його проекцій на дві взаємно перпендикулярні прямі.

Рівнянням фігури на координатній площині називають рівняння з двома змінними, яке задовольняють координати кожної точки даної фігури і тільки вони.

Рівняння кола радіуса r із центром у точці $A(a; b)$ має вигляд

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Якщо центр кола радіуса r лежить у початку координат, то його рівняння $x^2 + y^2 = r^2$.

Кожній прямій координатної площини відповідає лінійне рівняння з двома змінними $ax + by + c = 0$. Таке рівняння називають *загальним рівнянням прямої*.

Рівність $y = kx + b$ – *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*. Тут $k = \operatorname{tg}\alpha$, де α – кут, який утворює пряма з додатним напрямом осі OX.

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – *рівняння прямої, що проходить через дві дані точки* $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$.

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ – *рівняння прямої у відрізках на осях* (числа a і b показують, які відрізки пряма l відтинає на осях координат).

Якщо прямі l_1 і l_2 задані рівняннями $y_1 = k_1x + b_1$ і $y_2 = k_2x + b_2$, то:

1) $l_1 \parallel l_2$ тоді і тільки тоді, коли $k_1 = k_2$;

2) $l_1 \perp l_2$ тоді і тільки тоді, коли $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Векторні величини – ті, які визначаються не тільки числовими значеннями, а й напрямами. Значення векторних величин – *вектори*. Геометрично вектори (ненульові) зображаються *напрямленими відрізками*. Напрямлений відрізок має початок і кінець. Відстань між ними – *модуль* (довжина) вектора.

Два вектори називають *колінеарними*, якщо відповідні їм напрямлені відрізки розташовані на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарні вектори бувають співнапрямленими або протилежно напрямленими. Два вектори *рівні*, якщо вони співнапрямлені і мають рівні модулі. Два вектори називають *протилежними*, якщо вони мають рівні модулі і протилежно напрямлені.

Координатами вектора з початком $A(x_1; y_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$ і $y = y_2 - y_1$.

Записують такий вектор у вигляді:
$\overrightarrow{AB} = (x;\ y)$, або $\vec{a} = (x;\ y)$, або $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.
Модуль вектора $\overrightarrow{AB} = (x;\ y)$ позначають символом $|\overrightarrow{AB}|$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Сумою векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ називають вектор $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$. Для додавання векторів виконуються переставний і сполучний закони.

Геометрично додавати вектори можна за правилом трикутника або паралелограма (мал. 22 і 23). Завжди правильні векторні рівності:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Різницею векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ називають вектор $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2)$.

Різниця векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{KP}$ дорівнює $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PK}$. *Щоб відняти від одного вектора другий, треба до першого додати вектор, протилежний другому.*

Які не були б вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, завжди $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Добутком вектора $\vec{a} = (x;\ y)$ на число n називають вектор $n\vec{a} = (nx;\ ny)$. Завжди правильні рівності:

$$(n + m)\,\vec{a} = n\vec{a} + m\vec{a} \text{ і } n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}.$$

Скалярним добутком двох ненульових векторів називають добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi.$$

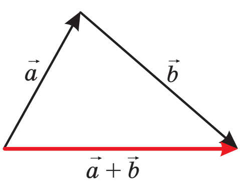
Якщо хоч один з векторів нульовий, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Кут φ між ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна знайти, користуючись формулою $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

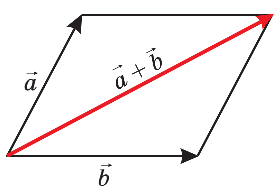
Якщо $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

$\vec{a} = k\vec{b}$ або $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$ – умова колінеарності ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $(k \neq 0)$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ або $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$ – умова їх перпендикулярності.



Мал. 22



Мал. 23

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке геометрія? Що таке планіметрія?
2. Наведіть приклади плоских і неплоских фігур.
3. Що означають записи $A \in a$, $B \notin a$?
4. Як слід розуміти вислів «точка B лежить між A і C»?
5. Що таке промінь? Як позначають промені?
6. Що таке відрізок? Що таке кінці відрізка?
7. Що таке відстань між двома точками?
8. Яка фігура називається кутом? Як позначають кути?
9. Який кут називають гострим? Прямим? Тупим? Розгорнутим?
10. Які кути називають суміжними? Чому дорівнює їх сума?
11. Які кути називають вертикальними?
12. Сформулюйте теорему про вертикальні кути.
13. Які прямі називають перпендикулярними?
14. Сформулюйте означення паралельних прямих.
15. Сформулюйте ознаку паралельності прямих.
16. Сформулюйте аксіому Евкліда про паралельність прямих.
17. Що таке трикутник? Назвіть елементи трикутника.
18. Якими бувають трикутники?
19. Що таке бісектриса, медіана, висота трикутника?
20. Сформулюйте теорему про суму кутів трикутника.
21. Сформулюйте ознаки рівності трикутників.
22. Який трикутник називають рівнобедреним?
23. Сформулюйте кілька властивостей рівнобедреного трикутника.
24. Як називають сторони прямокутного трикутника?
25. Сформулюйте ознаки рівності прямокутних трикутників.
26. Що таке перпендикуляр, похила, проекція похилої?
27. Що таке відстань від точки до прямої?
28. Що таке коло? Центр? Радіус? Діаметр? Хорда?
29. Що таке круг? Чим відрізняється круг від кола?
30. Сформулюйте означення і властивість дотичної до кола.
31. Що таке центральний кут? Вписаний кут?

32. Сформулюйте теорему про вписані кути.
33. Як побудувати трикутник за трьома даними сторонами?
34. Як побудувати кут, що дорівнює даному?
35. Як побудувати бісектрису даного кута?
36. Як поділити даний відрізок навпіл?
37. Як через дану точку провести пряму, перпендикулярну до даної прямої? А паралельну даній прямій?
38. Що таке геометричне місце точок? Наведіть приклади.
39. Що таке серединний перпендикуляр даного відрізка?
40. Як навколо даного трикутника описати коло?
41. Як у даний трикутник вписати коло?
42. Що таке чотирикутник?
43. Сформулюйте означення паралелограма.
44. Які властивості має паралелограм?
45. Сформулюйте ознаки паралелограма.
46. Що таке прямокутник? Які властивості має прямокутник?
47. Що таке ромб? Квадрат? Назвіть їх властивості.
48. Сформулюйте теорему Фалеса.
49. Сформулюйте теорему про середню лінію трикутника.
50. Що таке трапеція? Рівнобічна трапеція? Прямокутна трапеція?
51. Сформулюйте теорему про середню лінію трапеції.
52. Які трикутники називають подібними?
53. Сформулюйте ознаки подібності трикутників.
54. Сформулюйте теорему Піфагора.
55. Як знайти координати середини відрізка?
56. Як знайти відстань між точками з даними координатами?
57. Що таке рівняння фігури?
58. Яке рівняння має коло? Пряма?
59. Наведіть приклади векторних величин.
60. Як зображають вектори?
61. Що таке координати вектора?
62. Що таке довжина вектора?
63. Які вектори називають рівними? Колінеарними? Протилежними?

64. Що таке сума двох векторів?
65. Сформулюйте правило трикутника для додавання векторів.
66. Сформулюйте правило паралелограма для додавання векторів.
67. Що таке різниця векторів? Як її знаходять?
68. Сформулюйте правило множення вектора на число.
69. Сформулюйте властивості множення вектора на число.
70. Що таке синус, косинус, тангенс кута?
71. Сформулюйте теорему косинусів.
72. Сформулюйте теорему синусів.
73. Що таке многокутник?
74. Чому дорівнює сума кутів опуклого n-кутника?
75. Сформулюйте означення правильного многокутника.
76. За якою формулою знаходять довжину кола?
77. Що таке площа многокутника?
78. За якими формулами обчислюють площі прямокутника, паралелограма, трикутника, трапеції?
79. Сформулюйте теорему про відношення площ подібних многокутників.
80. За якою формулою знаходять площу круга?

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

Тематичні завдання в тестовій формі

Прямі і кути

1. Установіть, на скільки частин можуть розбити площину дві її прямі.
а) На 2 або на 3; б) на 2 або на 4;
в) на 3 або на 4; г) на 3 або на 5.

2. Якщо один із суміжних кутів на 80° більший від другого, то другий кут дорівнює:
а) 80°; б) 140°; в) 50°; г) 120°.

3. Відомо, що $a \perp c$ і $b \perp c$. Укажіть правильне відношення.
а) $a \perp b$; б) $a \cap b$; в) $a \parallel b$; г) $a \in b$.

4. Кут між однією з двох паралельних прямих і їх січною дорівнює 60°. Під яким кутом бісектриса цього кута перетинає другу пряму?
а) 60°; б) 40°; в) 30°; г) 120°.

5. Скільки прямих можна провести через дві різні точки?

а) Одну; б) дві; в) три; г) жодної.

6. Вписаний кут, що спирається на діаметр, дорівнює:

а) 180°; б) 80°; в) 45°; г) 90°.

7. Яким знаком не позначають взаємне розташування двох прямих?

а) $a \perp b$; б) $a \in b$; в) $a \parallel b$; г) $a \cap b$.

8. Прямі a і b не паралельні прямій c. Чи випливає з цього, що прямі a і b не паралельні?

а) Так; б) ні; в) так, якщо $a \perp c$; г) ні, якщо $b \perp c$.

9. Скільки пар вертикальних кутів утворюють три прямі, що перетинаються в одній точці?

а) 3; б) 6; в) 9; г) 12.

10. На одній стороні кута відкладено три відрізки $AB = 2$, $BC = 3$ і $CD = 5$. Через точки A, B, C і D проведено паралельні прямі AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1 до перетину з іншою стороною кута. Знайдіть B_1C_1, якщо $A_1D_1 = 20$.

а) 9; б) 6; в) 4; г) 10.

Трикутники

1. Якщо кути трикутника пропорційні числам 2, 3 і 4, то його найменший кут дорівнює:

а) 80°; б) 40°; в) 30°; г) 20°.

2. Найменший зовнішній кут прямокутного трикутника дорівнює:

а) 180°; б) 90°; в) 135°; г) 125°.

3. Площа рівностороннього трикутника зі стороною 2 дм дорівнює:

а) 4 дм^2; б) $2\sqrt{3}$ дм^2; в) $\sqrt{3}$ дм^2; г) $0{,}5\sqrt{3}$ дм^2.

4. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо $AC = 3$ см, $\angle B = 30°$.

а) 3 см; б) 6 см; в) $\sqrt{3}$ см; г) 12 см.

5. Менша медіана прямокутного трикутника з катетами 5 см і 12 см дорівнює:

а) 2,5 см; б) 6,5 см; в) 6 см; г) 5 см.

6. У трикутнику провели три середні лінії. Скільки пар подібних трикутників утворилося?

а) 4; б) 6; в) 10; г) 12.

7. За якою формулою обчислюють радіус кола, вписаного в трикутник?

а) $\dfrac{abc}{4R}$; б) $\dfrac{4S}{abc}$; в) $\dfrac{S}{p}$; г) $\dfrac{p}{S}$.

8. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює $\sqrt{20}$, а бісектриса, опущена на неї:

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{10}$.

9. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 6 см і 14 см, а кут між ними 30°.

а) 42 см^2; б) $21\sqrt{3}$ см^2; в) $21\sqrt{2}$ см^2; г) 21 см^2.

10. Площі двох подібних трикутників відносяться як 4 : 9. Як відносяться їхні сторони?

а) 16 : 81; б) 2 : 4,5; в) 1 : 2,5; г) 2 : 3.

Чотирикутники

1. Кількість осей симетрії квадрата дорівнює:

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5.

2. Основи трапеції дорівнюють 4 см і 10 см, а її середня лінія:

а) 4 см; б) 7 см; в) 10 см; г) 3,5 см.

3. Периметр паралелограма дорівнює 16 см. Одна його сторона – 5 см, а друга:

а) 5 см; б) 6 см; в) 11 см; г) 3 см.

4. Знайдіть кути ромба, якщо вони пропорційні числам 2 і 7.

а) 30° і 70°; б) 20° і 140°; в) 40° і 140°; г) 80° і 280°.

5. Менша сторона прямокутника дорівнює 5 см. Знайдіть довжину діагоналі, якщо вона утворює з більшою стороною кут 30°.

а) 10 см; б) 5 см; в) 2,5 см; г) 20 см.

6. Знайдіть площу ромба, якщо його менша діагональ і сторона дорівнюють 4 м.

а) $4\sqrt{3}$ м^2; б) $6\sqrt{3}$ м^2; в) $8\sqrt{3}$ м^2; г) $2\sqrt{3}$ м^2.

7. Якщо бісектриса кута прямокутника ділить його на частини, площі яких пропорційні числам 1 і 3, то його суміжні сторони відносяться як:

а) 1 : 2; б) 1 : 3; в) 1 : 4; г) 2 : 3.

8. Периметр рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 20 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

а) 5 см; б) 6 см; в) 11 см; г) 3 см.

9. Знайдіть найбільший кут прямокутної трапеції, якщо один з її кутів удвічі більший за інший.

а) $130°$ або $170°$; б) $120°$ або $135°$;
в) $140°$ або $145°$; г) $180°$ або $128°$.

10. Один з кутів ромба дорівнює $120°$, а периметр 24 см. Менша діагональ ромба дорівнює:

а) 2 см; б) 3 см; в) 4 см; г) 6 см.

Коло і круг

1. Довжина чверті кола радіуса 2π м дорівнює:

а) π^2 м; б) 16π м; в) 2 м; г) 4π м^2.

2. Площа круга дорівнює 100π см^2. Знайдіть довжину його кола.

а) 100π см; б) 50π см; в) 20π см; г) 2500π см.

3. Кут між двома радіусами кола дорівнює $125°$. Знайдіть кут між дотичними, проведеними через кінці цих радіусів.

а) $125°$; б) $95°$; в) $35°$; г) $55°$.

4. Під яким кутом із центра кола, вписаного в рівносторонній трикутник, видно сторону цього трикутника?

а) $30°$; б) $60°$; в) $90°$; г) $120°$.

5. Радіус кола, описаного навколо правильного шестикутника з периметром 24 см, дорівнює:

а) 12 см; б) 3 см; в) 6 см; г) 4 см.

6. Кола радіусів 3 м і 7 м мають внутрішній дотик. Відстань між їхніми центрами:

а) 2 м; б) 10 м; в) 4 м; г) 5 м.

7. Знайдіть площу кільця, утвореного концентричними колами радіусів 3 м і 5 м.

а) 2 м^2; б) 16π м^2; в) 2π м^2; г) 4π м^2.

8. Сторона квадрата, описаного навколо кола завдовжки 16π см, дорівнює:

а) 16 см; б) 8 см; в) 4 см; г) $4\sqrt{2}$ см.

9. Правильний трикутник ABC вписаний у коло. Знайдіть довжину кола, якщо довжина дуги BAC дорівнює 6 см.

а) 12π см; б) 12 см; в) 9 см; г) $4\sqrt{3}$ см.

10. Знайдіть площу сектора круга радіуса 6 см з центральним кутом $60°$.

а) 6π см^2; б) 3π см^2; в) 9π см^2; г) 2π см^2.

Координати на площині

1. Середина відрізка KP, де K (1; −3), P (7; 5), має координати:
а) (−1; 3); б) (4; 1); в) (2; 1); г) (3; 4).

2. Який знак слід поставити в запису $AC * BC$ замість зірочки, якщо $A(-1; 3)$, $B(5; 6)$, $C(2; 4{,}5)$?
а) $>$; б) $<$; в) $=$; г) $\neq$.

3. Яка з точок не належить прямій $2x + y = 7$?
а) (−2; 11); б) (−0,5; 8); в) (2; 5); г) (0,5; 6).

4. Прямій $y = \frac{1}{2}x + 5$ паралельна пряма:
а) $y = 5$; б) $3x + y = 4$; в) $2y - x = 2$; г) $x + 3y = 6$.

5. Пряма $x + y = 5$ утворює з додатним напрямом осі OX кут:
а) 90°; б) 45°; в) 135°; г) 30°.

6. Центр кола $x^2 + (y - 2)^2 - 8 = 0$ має координати:
а) (0; 4); б) (1; 2); в) (0; 2); г) (2; 4).

7. Точка M, яка лежить на осі OX та рівновіддалена від точок $A(5; 4)$ і $B(2; 1)$, має координати:
а) (0; 4); б) (1; 0); в) (0; 2); г) (6; 0).

8. Коло з діаметром AB, де $A(4; 3)$, $B(-4; -3)$, має рівняння:
а) $x^2 + y^2 = 5$; б) $x^2 + y^2 = 9$;
в) $x^2 + y^2 = 25$; г) $x^2 + y^2 = 3$.

9. Якщо діаметр кола $x^2 + y^2 = 25$ проходить через точку $A(3; 4)$, то його рівняння:
а) $3x + 4y = 25$; б) $3y = 4x$;
в) $y + x = 5$; г) $4x + 3y = 0$.

10. Яка з прямих не є дотичною до кола $x^2 + (y - 2)^2 = 9$?
а) $x = 3$; б) $y = 3$; в) $x = -3$; г) $y = -1$.

Вектори

1. Якщо $A(1; -3)$ і $B(-7; 12)$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати:
а) (6; −15); б) (−8; 15); в) (−8; 9); г) (−6; 9).

2. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, то:
а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$; б) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$;
в) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; г) $\vec{a} : \vec{b} = \vec{0}$.

3. Знайдіть координати вектора $\vec{m} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, якщо $\vec{p} = (-2; 1)$, $\vec{q} = (4; -3)$.
а) (8; −7); б) (−14; 0); в) (8; 11); г) (−2; 3).

4. Знайдіть довжину вектора $\vec{a} = (-2; 4)$.
а) $2\sqrt{10}$; б) 20; в) 12; г) $2\sqrt{5}$.

5. Вектор, колінеарний вектору $\vec{a} = (-1; 4)$, має координати:
а) $(-2; -8)$; б) $(0,5; 2)$; в) $(3; -3)$; г) $(4; -16)$.

6. Сумою векторів $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$ є вектор:
а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\vec{0}$; г) $\overrightarrow{AD}$.

7. Якщо скалярний добуток двох одиничних векторів дорівнює 0,5, то кут між ними:
а) 30°; б) 60°; в) 120°; г) 45°.

8. При якому значенні m вектори $\vec{a} = (-2; 6)$ і $\vec{b} = (9; m)$ перпендикулярні?
а) −3; б) 27; в) 3; г) −27.

9. При якому значенні x вектори $\vec{m} = (3; x)$ і $\vec{n} = (-6; 7)$ колінеарні?
а) 14; б) 3,5; в) −3,5; г) −14.

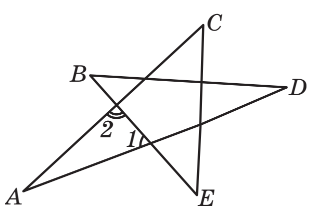
10. Проекції вектора $\overrightarrow{AB}$ на осі x і y дорівнюють відповідно a і b, а проекція вектора $\overrightarrow{BA}$ на вісь y дорівнює:
а) $-a$; б) $-b$; в) b; г) a.

§2 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Планіметричні задачі бувають різних видів, здебільшого – на обчислення, побудову, доведення чи дослідження. У ***задачах на обчислення*** найчастіше вимагається знайти значення геометричної величини: відстань, довжину дуги, міру кута, периметр чи площу фігури.

ЗАДАЧА 1. Знайдіть суму кутів A, B, C, D, E зірки, зображеної на малюнку 24.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним. Тому, позначивши на малюнку два кути цифрами *1* і *2*, маємо:



Мал. 24

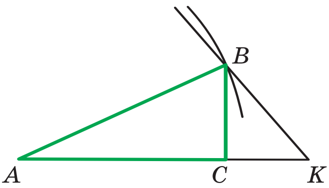
$\angle B + \angle D = \angle 1$, $\angle C + \angle E = \angle 2$. Отже, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \angle A + \angle 1 + \angle 2 = 180°$.

ВІДПОВІДЬ. Сума кутів кожної такої п'ятикутної зірки дорівнює 180°.

У ***задачах на побудову*** вимагається побудувати фігуру зі вказаними властивостями. Класичними вважають побудови, виконувані тільки лінійкою і циркулем. При цьому часто використовують методи геометричних місць, подібності, паралельного перенесення, симетрії тощо.

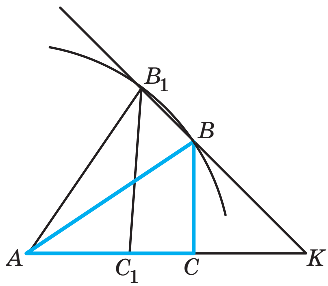
ЗАДАЧА 2. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою c і сумою двох катетів m.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. *Аналіз*. Припустимо, що потрібний трикутник ABC побудовано (мал. 25). Добудувавши до нього прямокутний рівнобедрений трикутник BCK, матимемо трикутник ABK, у якого $\angle K = 45°$, $AK = m$ і $AB = c$ – відомі відрізки. За двома даними сторонами і кутом K трикутник ABK побудувати можна. Провівши в ньому перпендикуляр BC, можна визначити третю вершину C трикутника ABC.



Мал. 25

Побудова. Відкладаємо відрізок $AK = m$. При одному його кінці будуємо кут $AKB = 45°$, а з другого, як із центра, проводимо дугу кола радіуса $AB = c$. Якщо ця дуга перетинає промінь KB у точці B, проводимо перпендикуляр BC до AK. Трикутник ABC той, який вимагалося побудувати.



Мал. 26

ДОВЕДЕННЯ. За побудовою $AC \perp BC$, $AB = c$ і $AC + CB = AC + CK = AK = m$.

Дослідження. Якщо $c \geq m$, то згідно з нерівністю трикутника розв'язків не існує.

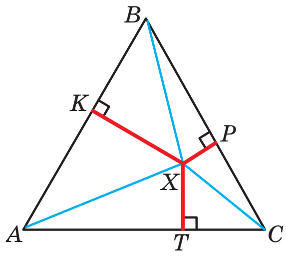
Якщо $c < \frac{m\sqrt{2}}{2}$, то дуга кола не має з променем KB спільних точок, а тому розв'язків немає.

Якщо $\frac{m\sqrt{2}}{2} \leq c < m$, то задача має один розв'язок:

при $c = \frac{m\sqrt{2}}{2}$ коло і промінь KB дотикаються;

в інших випадках, хоч дуга з променем і перетинаються у двох точках (мал. 26), але утворені при цьому трикутники ABC і AB_1C_1 рівні.

У ***задачах на доведення*** пропонується довести яке-небудь твердження.



Мал. 27

ЗАДАЧА 3. Доведіть, що сума відстаней від довільної точки X внутрішньої області правильного трикутника до його сторін стала, тобто не залежить від положення цієї точки.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай ABC – правильний трикутник зі стороною a і висотою h, X – довільна точка у його внутрішній області, а XK, XP, XT – перпендикуляри до AB, BC, AC (мал. 27). Виразимо двома способами площу S трикутника ABC.

Відрізки XA, XB, XC даний трикутник розбивають на три трикутники з основами AB, BC, CA і висотами XK, XP, XT. Їх подвоєні площі дорівнюють $a \cdot XK$, $a \cdot XP$, $a \cdot XT$, а подвоєна площа всього трикутника $a \cdot h$. Отже,

$a \cdot XK + a \cdot XP + a \cdot XT = a \cdot h$, звідси $XK + XP + XT = h$.

Отже, де б не була точка X (усередині $\triangle ABC$), сума відстаней від неї до сторін не змінюється і дорівнює h.

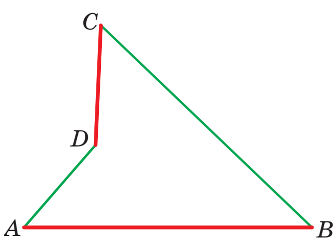
У ***задачах на дослідження*** пропонується дослідити що-небудь.

ЗАДАЧА 4. Кожна сторона паралелограма паралельна протилежній стороні. А чи існує чотирикутник, кожна сторона якого перпендикулярна до протилежної сторони?

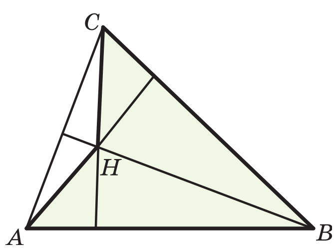
РОЗВ'ЯЗАННЯ. *Перший спосіб*. Спробуємо накреслити хоча б один з таких чотирикутників. Нехай AB і CD – його протилежні сторони – перпендикулярні відрізки. Провівши відрізки AD і BC, утворимо чотирикутник $ABCD$, у якого $AB \perp CD$ (мал. 28). Дві інші його сторони AD і BC можуть бути не перпендикулярні. Але продовживши або вкоротивши відрізок AB, можна досягти, щоб і вони стали перпендикулярними.

ВІДПОВІДЬ. Чотирикутник, кожна сторона якого перпендикулярна до протилежної сторони, існує.

Другий спосіб. Нехай ABC – довільний гострокутний трикутник, а його висоти перетинаються в точці H (мал. 29).



Мал. 28



Мал. 29

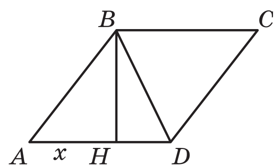
Зафарбуємо неопуклий чотирикутник $ABCH$. Кожна його сторона перпендикулярна до протилежної сторони.

Другий спосіб продуктивніший: він додатково показує, що в такого чотирикутника діагоналі перпендикулярні. А отже, середини сторін чотирикутника $ABCH$ – вершини прямокутника, а площа чотирикутника $ABCH$ дорівнює півдобутку діагоналей тощо.

Якщо в розв'язанні використовують тільки геометричні відомості, таке розв'язання називають *геометричним*. Якщо ж використовують відомості з алгебри чи математичного аналізу, то кажуть про *аналітичне розв'язання*. Найчастіше аналітичне розв'язання задачі зводиться до складання за умовою геометричної задачі відповідних рівнянь чи систем рівнянь.

ЗАДАЧА 5. Знайдіть площу ромба, якщо його висота і менша діагональ відповідно дорівнюють 12 см і 13 см.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $ABCD$ – ромб (мал. 30), а BH і BD – його висота і діагональ. Тоді $BH = 12$ см, $BD = 13$ см, а $HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ (см).



Мал. 30

Нехай $AH = x$. Тоді $AB = AD = AH + HD = x + 5$.

З $\triangle ABH$ $AB^2 = BH^2 + AH^2$. Можемо скласти рівняння:

$(x + 5)^2 = 12^2 + x^2$, або $x^2 + 10x + 25 = 144 + x^2$, звідси $x = 11{,}9$ (см).

Маємо $AB = x + 5 = 11{,}9 + 5 = 16{,}9$ (см). Знайдемо тепер площу S ромба $ABCD$.

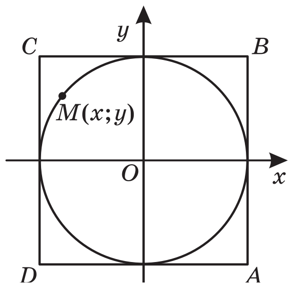
$S = BH \cdot AD$, тобто $S = 12 \cdot 16{,}9 = 202{,}8$ (см^2).

ВІДПОВІДЬ. $S = 202{,}8$ см^2.

Ефективними методами розв'язування геометричних задач є координатний і векторний методи.

Координатний метод полягає в тому, що розв'язуючи геометричну задачу, оперують координатами окремих точок, рівняннями прямих або інших ліній. Розв'язуючи задачу координатним методом, розглядувані фігури розміщують на координатній площині. Приписавши окремим точкам фігур координати, а лініям — рівняння, далі обчислюють координати інших точок, виводять рівняння інших ліній. У результаті отримуємо потрібну відповідь.

Раціональність розв'язання задачі цим методом значною мірою залежить від того, як розглядувану фігуру розмістити відносно координатних осей. Найзручніше цим методом користуватися тоді, коли в задачі мова йде про прямі кути або суми квадратів якихось відстаней.



Мал. 31

ЗАДАЧА 6. Знайдіть суму квадратів відстаней від довільної точки кола радіуса 5 см до вершин описаного навколо нього квадрата.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Коло радіуса 5 см і описаний навколо нього квадрат розмістимо в системі координат так, щоб її осі були серединними перпендикулярами для сторін квадрата (мал. 31). Тоді колу відповідатиме рівняння $x^2 + y^2 = 25$, а вершини квадрата матимуть координати $A(5; -5)$, $B(5; 5)$, $C(-5; 5)$, $D(-5; -5)$.

Якщо $M(x; y)$ – довільна точка кола, то $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = (5 - x)^2 + (-5 - y)^2 + (5 - x)^2 + (5 - y)^2 + (-5 - x)^2 + (5 - y)^2 + (-5 - x)^2 + (-5 - y)^2 = 2((5 - x)^2 + (5 + x)^2 + (5 + y)^2 + (5 - y)^2) = 200 + 4(x^2 + y^2) = 300$ (см^2).

ВІДПОВІДЬ. 300 см^2.

Якщо задачу розв'язують, використовуючи властивості векторів, то це – векторний метод розв'язування задачі. Для ефективного його застосування слід уміти геометричні співвідношення (властивості геометричних фігур) записувати у вигляді векторних рівностей. При цьому часто використовують такі твердження та векторні рівності:

1) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ – точки A і B збігаються;

2) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ – прямі AB і CD паралельні або збігаються;

3) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ – точки A, B, C лежать на одній прямій;

4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ – прямі AB і CD перпендикулярні;

5) $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{n}\overrightarrow{MB}$, а числа m і n додатні – точка M ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = m : n$;

6) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$ – кут між прямими, на яких лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює φ;

7) $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$ – M – середина відрізка AB;

8) $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$ – M – точка перетину медіан трикутника ABC;

9) $\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$ – точка M ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = m : n$.

Користуючись цими співвідношеннями, можна розв'язувати багато геометричних задач та доводити теореми.

Розв'язування задачі векторним методом складається з кількох кроків:

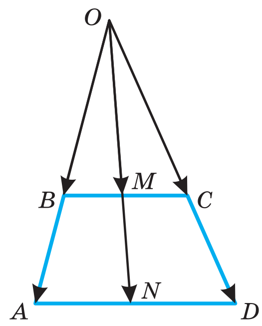
– подані в задачі співвідношення «перекладають мовою» векторів, тобто записують їх відповідними векторними рівностями;

– отримані векторні рівності перетворюють, використовуючи правила векторної алгебри;

– від мови векторів переходять до мови геометрії.

ЗАДАЧА 7. Точка перетину прямих, яким належать бічні сторони трапеції, та середини її основ лежать на одній прямій. Доведіть.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. На малюнку 32 зображено трапецію $ABCD$. Точки M і N – середини її основ, а O – точка перетину прямих AB і CD. Щоб довести, що точки M, N і O лежать на одній прямій, покажемо, що вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$ – колінеарні.



Мал. 32

Оскільки M – середина BC, а N – середина AD, то виконуються рівності:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \text{ і } \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}).$$

Оскільки $\triangle OBC \sim \triangle OAD$, то $OA : OB = OD : OC = k$. Звідси

$$\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}k(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = k\overrightarrow{OM}.$$

Маємо $\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM}$. Отже, точки M, N і O лежать на одній прямій.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

А

1. Через точку на площині проведено 3 прямі. Доведіть, що міри принаймні двох з утворених кутів менші за 61°.

2. Установіть вид трикутника, якщо його кути пропорційні числам 1, 2 і 3.

3. Визначте найбільший внутрішній кут трикутника, якщо його зовнішні кути (взяті по одному при вершині) пропорційні числам 2, 3 і 4.

4. Висота і медіана прямокутного трикутника, проведені з вершини прямого кута, ділять кут на три рівні частини.

Знайдіть кут між висотою і бісектрисою, проведеною із цієї вершини.

5. Точка O – спільна середина відрізків AD і BC. Пряма l, що проходить через точку O, перетинає відрізок AB у точці M, а відрізок CD у точці N. Доведіть:

а) $MO = NO$; б) $AM = DN$; в) $\angle DNO = \angle AMO$.

6. У рівнобедреному трикутнику ABC проведено медіани AM і BN до бічних сторін. Доведіть:

а) $\triangle AMB = \triangle BNA$; б) $\triangle CAM = \triangle CBN$.

7. У рівнобедреному трикутнику ABC проведено бісектриси AM і BN до бічних сторін. Доведіть:

а) $\triangle AMB = \triangle BNA$; б) $\triangle CAM = \triangle CBN$.

8. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого бічна сторона і висота, проведена до основи, дорівнюють відповідно 8 см і 6 см.

9. Побудуйте прямокутний трикутник, у якого один з катетів дорівнює 3 см, а медіана, проведена до іншого катета, 6 см.

10. Поділіть заданий відрізок на 7 рівних частин.

11. Сума двох сусідніх кутів опуклого чотирикутника дорівнює 100°. Знайдіть кут між бісектрисами двох інших його кутів.

12. Знайдіть усі медіани прямокутного трикутника з катетами 3,2 см і 4,8 см.

13. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону на відрізки 5 см і 15 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчисліть периметр паралелограма.

14. Перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута до однієї з діагоналей прямокутника, поділяє її у відношенні 1 : 3. Доведіть, що одна зі сторін прямокутника дорівнює половині діагоналі.

15. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і $4\sqrt{6}$ см, а висота, проведена з їхньої спільної вершини, – 4 см. Знайдіть площу трикутника.

16. Знайдіть основи трапеції, якщо їх різниця і середня лінія трапеції дорівнюють 10 м.

17. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть синуси, косинуси і тангенси кутів трикутника.

18. Обчисліть кути рівнобічної трапеції, якщо синус одного з них дорівнює $0{,}5\sqrt{3}$.

19. Побудуйте кут, косинус якого дорівнює 0,5. Знайдіть синус і тангенс цього кута.

20. Побудуйте кут, тангенс якого дорівнює 5. Знайдіть синус і косинус цього кута.

21. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною 6 см і кутом при основі, косинус якого дорівнює $\frac{1}{3}$.

22. Косинуси гострих кутів трапеції дорівнюють 0,8 і 0,6. Знайдіть синуси, косинуси і тангенси його тупих кутів.

23. Знайдіть невідому сторону $\triangle ABC$, якщо:
а) $AB = 3$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;
б) $AB = 6\sqrt{2}$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 45°$.

24. Сторони трикутника пропорційні числам 7, 8 і 13. Знайдіть найбільший кут трикутника, якщо його периметр 56 см.

25. Діагоналі паралелограма дорівнюють 12 см і 32 см, а одна зі сторін 14 см. Знайдіть периметр паралелограма і кут між його діагоналями.

26. Діагоналі ромба дорівнюють 16 см і 12 см. Знайдіть периметр і площу ромба.

27. Периметр ромба дорівнює 6,8 см, а одна з діагоналей 1,6 см. Знайдіть площу ромба.

28. Периметр паралелограма дорівнює 52 см, а його площа 60 см^2. Знайдіть сторони і висоти паралелограма, якщо його гострий кут 30°.

29. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 8 см і 18 см. Знайдіть радіус вписаного кола.

30. Бісектриса прямого кута трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 20 дм і 15 дм. Знайдіть площу трикутника.

31. Знайдіть діагоналі рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона 13 см.

32. Знайдіть кути опуклого п'ятикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 4, 5, 7, 8.

33. Центральний кут правильного n-кутника у 4 рази менший за його внутрішній кут. Знайдіть n.

34. Накресліть коло діаметра 6 см. Впишіть у коло й опишіть навколо нього правильні n-кутники та обчисліть їх периметри, якщо: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 12$.

35. У коло вписано квадрат і правильний шестикутник. Периметр квадрата 24 см. Знайдіть периметр і площу шестикутника.

36. Навколо кола описано правильний трикутник, а в коло вписано правильний шестикутник, периметр якого 18 см. Знайдіть периметр і площу трикутника.

37. Дано правильний шестикутник зі стороною 4 см. Знайдіть ширину і площу кільця, утвореного колами, вписаним і описаним навколо шестикутника.

38. Знайдіть сторони та площу $\triangle ABC$, якщо $A(3; 4)$, $B(-3; 4)$, $C(-3; -4)$.

39. Дано $\triangle ABC$, у якого $A(7; 5)$, $B(4; 1)$, $C(-4; 7)$. Знайдіть довжини його медіан.

40. Відрізок MN точками K і P поділено на три рівні частини ($MK = KP = PN$). Знайдіть координати точки N, якщо $M(2; -4)$, $P(-6; 2)$.

41. На осі абсцис знайдіть точку M, яка рівновіддалена від початку координат і від точки $P(2; 3)$.

42. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(1; 4)$ і $B(-2; 1)$. Знайдіть площу трикутника, який відтинає ця пряма від осей координат.

43. Доведіть, що трикутник з вершинами $A(3; 4)$, $B(6; -2)$, $C(-3; 1)$ – рівнобедрений. Знайдіть його площу.

44. Установіть вид чотирикутника $ABCD$, якщо $A(3; 1)$, $B(4; 6)$, $C(9; 7)$, $D(8; 2)$. Знайдіть його периметр і площу.

45. Знайдіть координати точки, яка симетрична точці $A(3; -5)$ відносно: а) точки $(0; 0)$; б) осі абсцис; в) осі ординат.

46. Побудуйте два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Побудуйте вектор $\vec{d}$ такий, що:

а) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$;
в) $\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b}$; г) $\vec{d} = 2\vec{a} + 0{,}5\vec{b}$.

47. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо $A(1; 6)$, $B(3; 2)$, $C(0; -1)$, $D(2; -5)$?

48. Знайдіть модуль вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (1; 3)$, $\vec{b} = (-2; 0)$.

49. При яких значеннях x вектори $\vec{a} = (x; 2)$ і $\vec{b} = (4; 2x)$ колінеарні?

50. При яких значеннях x вектори $\vec{p} = (2; x)$ і $\vec{s} = (x; x + 3)$ перпендикулярні?

Б

51. По різні сторони від прямої MN позначено точки A і B так, що $MA = MB$ і $NA = NB$. Доведіть, що $AB \perp MN$.

52. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 30 см. Висота, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки у відношенні 7 : 18, починаючи від вершини. Знайдіть площі частин трикутника, на які його поділяє ця висота.

53. Сторона трикутника, медіана і висота, проведені до неї, дорівнюють відповідно 34, 25 і 24 см. Знайдіть периметр трикутника.

54. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 18 см. У якому відношенні діагоналі діляться точкою перетину?

55. Довжина кола збільшилася на 20 %. На скільки відсотків збільшиться площа вписаного в це коло правильного трикутника?

56. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а один з гострих кутів дорівнює 30°. Знайдіть радіус кола з центром у вершині цього кута, яке поділяє даний трикутник на дві рівновеликі частини.

57. Батько і дочка стоять одне навпроти одного. Їхні тіні відповідно дорівнюють 3 м і 2,5 м. Який зріст має дочка, якщо зріст батька 183 см?

58. Основи рівнобічної трапеції, в яку можна вписати коло, пропорційні числам 3 і 11. Знайдіть синуси кутів трапеції.

59. Знайдіть невідомі сторони $\triangle ABC$, якщо:

а) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;

б) $AB = 6$ см, $AC = 4$ см, $\cos B = \frac{7}{9}$;

в) $AC - AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 120°$;

г) $AC = 6$ см, $BC = 14$ см, $\angle A = 60°$.

60. Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 23 см і 30 см. Знайдіть довжину медіани, бісектриси і висоти, проведених до найбільшої сторони.

61. У трикутику ABC $AB = BC = 6$ см, $\sin A = 0{,}4$. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до центра кола, описаного навколо трикутника.

62. AL – бісектриса рівнобедреного $\triangle ABC$ ($AB = BC$), $BL = a$, $\angle A = 2\alpha$. Знайдіть сторони трикутника і довжини його бісектрис.

63. BM – медіана трикутника ABC, $BM = m$, $\angle ABM = \alpha$, $\angle CBM = \beta$. Знайдіть AB.

64. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 24 см. Знайдіть радіуси вписаного і описаного кіл.

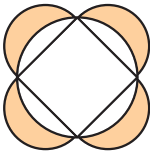
65. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято точки K і T так, що $AB = 10$ см, $AK = 2$ см, $BC = 14$ см, $TC = 9$ см. Знайдіть площу чотирикутника $AKTC$, якщо $S_{ABC} = 28$ см^2.

66. Основи рівнобічної трапеції $ABCD$ дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона – 13 см. Знайдіть радіуси кіл: а) описаного навколо трапеції; б) вписаного в $\triangle ABC$; в) вписаного в $\triangle ACD$.

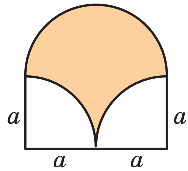
67. Дано два круги з радіусами по 1 дм, відстань між їх центрами дорівнює $\sqrt{3}$ дм. Знайдіть площу спільної частини цих кругів.

68. Спільна хорда двох кругів стягує дуги 60° і 120°. Знайдіть відношення радіусів цих кругів.

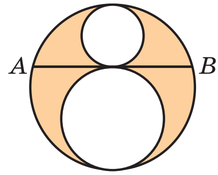
69. Чотири серпики утворені колом, описаним навколо квадрата, і півколами, побудованими на сторонах квадрата як



Мал. 33



Мал. 34



Мал. 35

на діаметрах (мал. 33). Доведіть, що сума площ цих чотирьох серпиків дорівнює площі квадрата.

70. Знайдіть площу фігури, заштрихованої на малюнку 34.

71. На малюнку 35 зображено три різні попарно дотичні кола і хорда, яка дотикається до двох менших кіл у їх спільній точці. Знайдіть площу заштрихованої частини більшого круга, якщо довжина хорди a.

72. У круговий сектор AOB радіуса $OA = 10$ см вписано коло. Знайдіть відношення площ сектора і круга, якщо $S_{\triangle AOB} = 25\sqrt{3}$ см^2.

73. AK, BL, CM – медіани трикутника ABC. Знайдіть координати точки L, якщо $A(-3; -1)$, $B(-2; 1)$, $K(1; -1)$.

74. Знайдіть сторони та площу трикутника ABC, якщо $A(a; b)$, $B(-a; b)$, $C(-a; -b)$ і точка A лежить у III координатній чверті.

75. Дано трикутник ABC, у якого $A(7; 5)$, $B(4; 1)$, $C(-4; 7)$. Знайдіть довжини медіани, висоти і бісектриси, проведених з вершини B.

76. Використовуючи умову попередньої задачі, напишіть рівняння медіани, висоти і бісектриси, проведених з вершини B.

77. Точки $A(2; -5)$ і $C(2; -1)$ є вершинами квадрата $ABCD$. Напишіть рівняння кола, вписаного в цей квадрат, та кола, описаного навколо нього. Знайдіть невідомі вершини квадрата.

78. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через центри двох кіл: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ і $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$.

79. Чи має трикутник ABC, у якого $A(-6; -1)$, $B(-3; 5)$, $C(3; 2)$, вісь симетрії? Якщо має, то запишіть її рівняння.

80. AC – діагональ квадрата. Запишіть рівняння осей симетрії цього квадрата, якщо $A(1; 2)$, $C(5; 6)$.

81. Коло радіуса 3 дотикається до осей координат у I чверті. Запишіть рівняння цього кола і кола, симетричного даному відносно: а) початку координат; б) осі абсцис; в) осі ординат; г) прямої $y = 2x$.

82. O – точка перетину медіан рівностороннього трикутника ABC. При паралельному перенесенні точка A відобразилася на точку O. Виконайте паралельне перенесення $\triangle ABC$. Знайдіть периметр побудованого трикутника, якщо $S_{\triangle AOB} = S\sqrt{3}$.

83. При гомотетії відносно початку координат точка $A(1;\ 2)$ переходить у точку $A_1(3;\ 6)$. У яку точку при цій гомотетії перейде точка $B(3;\ -2)$? Знайдіть коефіцієнт гомотетії.

84. Ромби $ABCD$ і $MNPK$ – подібні, $AC : BD = 4 : 5$. Знайдіть діагоналі ромба $MNPK$, якщо його площа дорівнює 40 см^2.

85. Пряма MN, паралельна основі AC трикутника ABC, ділить його на дві частини – трикутник і трапецію. Площі цих фігур пропорційні числам 1 і 3. Знайдіть периметр $\triangle ABC$, якщо периметр $\triangle MBN$ дорівнює 7 см.

86. Побудуйте три довільні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Побудуйте вектор $\vec{d}$ такий, що:

а) $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$; б) $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$;

в) $\vec{d} = 0{,}5\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$; г) $\vec{d} = \vec{a} + 0{,}5\vec{b} - 2\vec{c}$.

87. Знайдіть модуль вектора $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right) = 60°$.

88. Знайдіть косинус кута A трикутника ABC, якщо $A(-1;\ 2)$, $B\ (3;\ 5)$, $C\ (2;\ -1)$.

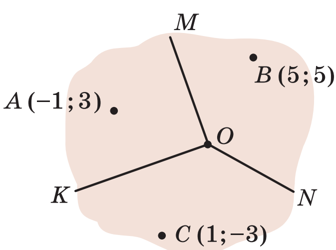
89. При яких значеннях a кут між векторами $\vec{m} = (6;\ a)$ і $\vec{b} = (-5;\ a - 1)$ тупий?

90. Знайдіть кут між одиничними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вектор $5\vec{a} - 4\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a} - 2\vec{b}$.

91. Дано точки $A(4;\ -2)$ і $B(2;\ -5)$. Запишіть рівняння прямої, яка дотикається до кола діаметра AB у точці A.

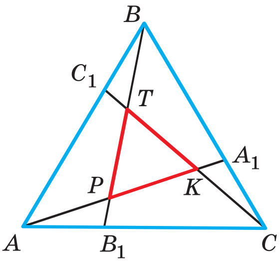
92. Запишіть рівняння дотичних, проведених з точки $A(5;\ 0)$ до кола $x^2 + y^2 = 9$.

93. На діаграмі Вороного зображено три антени A, B, C, їх координати та області обслуговування (мал. 36). Ребра OM, ON, OK клітин на діаграмі Вороного будуються як серединні перпендикуляри до відрізків AB, BC і AC. Запишіть рівняння ребер діаграми Вороного і координати точки O – вершини діаграми Вороного.

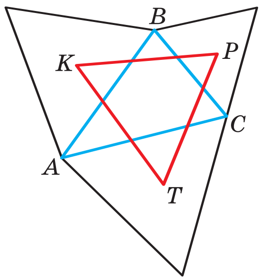


Мал. 36

Георгій Феодосійович ВОРОНИЙ (1868–1908)



Мал. 37



Мал. 38

94*. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC позначено точки A_1, B_1, C_1 такі, що $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 2$ (мал. 37). Як відносяться площі трикутників ABC і KPT?

95*. На сторонах довільного трикутника ABC зовні нього побудовано правильні трикутники (мал. 38). Доведіть, що їх центри K, P, T – вершини правильних трикутників.

96. На основі AC трикутника ABC взято точки M і H такі, що $AM < AH$. Прямі BM і BH ділять медіану AK на три рівні частини. Знайдіть AC, якщо $MH = 3$.

97*. Протилежні сторони опуклого шестикутника паралельні. Доведіть, що прямі, які сполучають середини протилежних сторін, перетинаються в одній точці.

98*. Пряма Ейлера проходить через центр вписаного у трикутник кола. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

99*. Якщо вписане в трикутник коло дотикається до його сторін AB, BC, CA в точках A_1, B_1, C_1, то прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці. Доведіть.

100*. На катетах AC і BC прямокутного трикутника ABC зовні нього побудовано квадрати $ACKP$ і $CBMT$. Доведіть, що прямі AM, BP і висота CH трикутника перетинаються в одній точці.

Вступ до стереометрії

Основні теми розділу:

- **Основні поняття стереометрії.**
- **Аксіоми стереометрії та наслідки з них.**
- **Просторові геометричні фігури.**
- **Початкові уявлення про многогранники.**
- **Найпростіші задачі на побудову перерізів многогранників.**
- **Поняття про аксіоматичний метод.**

РОЗДІЛ 2

Математикам без аксіом і відомих уже теорем було б дуже важко просуватися вперед.

Г. Лейбніц

§ 3 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Геометрія – наука про властивості геометричних фігур. Вона складається з двох частин: планіметрії і стереометрії. У планіметрії розглядаються фігури в одній площині. Стереометрія (від грец. στερεοζ – просторовий і μετρεω – вимірюю) вивчає властивості геометричних фігур у просторі.

Геометрична фігура – будь-яка множина точок. Скінченна або нескінченна, на площині або в просторі.

У стереометрії вивчаються властивості як плоских геометричних фігур, так і неплоских. Фігура називається *неплоскою* (просторовою), якщо не всі її точки лежать в одній площині. Приклади неплоских фігур: куб, паралелепіпед, куля.

Розглядають у стереометрії й інші геометричні поняття:

– *геометричні величини* (довжини, площі, об'єми, міри кутів);

– *геометричні перетворення* (паралельні перенесення, різні симетрії, повороти, перетворення подібності тощо);

– *вектори*;

– *геометричні відношення* (перпендикулярності, паралельності, рівності, подібності тощо).

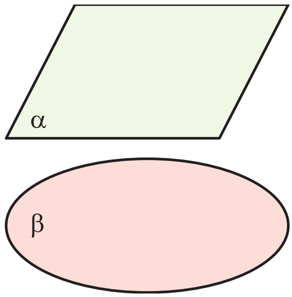
Зміст більшості наукових понять звичайно розкривають за допомогою означень. Але не все можна означити. Щоб означити якесь поняття, треба підвести його під інше поняття, зміст якого вже відомий. Наприклад, формулюючи означення «паралелограмом називається чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні», означуване поняття «паралелограм» підводять під уже відоме поняття «чотирикутник». А під які геометричні поняття можна підвести перші поняття, такі як «точка», «пряма», «площина»? Їх вводять без означень і називають *основними* (неозначуваними) поняттями.

Властивості неозначуваних понять розкривають за допомогою *аксіом*. Далі ми сформулюємо аксіоми стереометрії. Але спочатку зробимо кілька зауважень про поняття «площина».

Про площину говорять і в планіметрії (згадайте хоча б означення паралельних прямих). Але там розглядають тільки одну площину; усі фігури, які вивчають у планіметрії, належать цій єдиній площині. Отже, у планіметрії за універсальну множину точок служить *площина*.

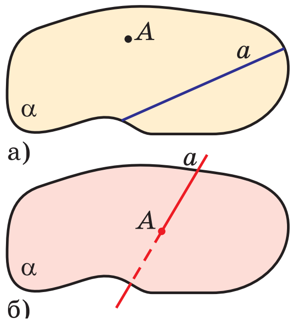
У стереометрії універсальною множиною точок є *простір* (тривимірний), у ньому існує безліч різних площин. Матеріальними моделями частини площини є, наприклад, поверхня віконного скла, добре відполірована поверхня стола, мармурової плити, поверхня аеродрому тощо. Зрозуміло, що це грубі моделі. У геометрії площину мислять необмеженою, ідеально рівною і гладенькою, що не має ніякої товщини.

Зображають площини у вигляді паралелограмів або «шматків» площини, обмежених довільними замкненими лініями (мал. 39). Позначають їх зазвичай грецькими літерами α, β, γ, δ, ω тощо.



Мал. 39

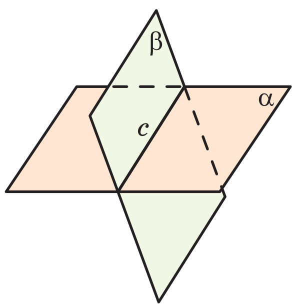
Як і будь-яка геометрична фігура, площина складається з точок. Якщо точка A *лежить* у площині α, кажуть, що площина α *проходить* через точку A, і записують: $A \in \alpha$. Запис $A \notin \alpha$ означає, що точка A *не лежить* у площині α. Якщо кожна з точок A, B, C (що не лежать на одній прямій) лежить у деякій площині α, то її можна позначати символом (ABC).



Мал. 40

Якщо кожна точка прямої a належить площині α, кажуть, що пряма a *лежить у площині* α, або *площина* α *проходить через пряму* a. За допомогою символів записують це так: $a \subset \alpha$. На малюнку 40, *а* зображено площину α, яка проходить через пряму a і точку A. Запис $b \not\subset \alpha$ означає, що пряма b *не лежить у площині* α.

Якщо пряма a і площина α мають тільки одну спільну точку A, кажуть, що вони *перетинаються в точці* A. Записують: $a \cap \alpha = A$. На малюнку невидиму частину прямої зображають штриховою лінією (мал. 40, *б*).



Мал. 41

Якщо через пряму c проходять дві площини α і β, кажуть, що ці площини перетинаються по прямій c. Записують: $\alpha \cap \beta = c$ (мал. 41).

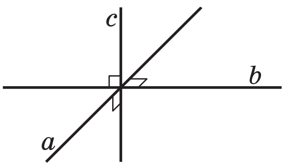
ЗАУВАЖЕННЯ. Коли кажуть «дві площини», то вважають, що вони різні, не збігаються. Так само розумітимемо вирази «дві точки», «дві прямі» тощо.

Для допитливих

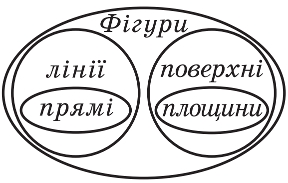
Не слід до неплоских фігур відносити тільки такі, як куб, куля, циліндр, конус, які мають поверхню чи об'єм. Дві площини, які перетинаються (мал. 41), утворюють одну неплоску фігуру, три прямі, які перетинаються в одній точці і перпендикулярні кожна до кожної (мал. 42), – також неплоска фігура. Такі фігури не мають ні площі, ні об'єму.

Крім понять пряма і площина, нерідко розглядають ще поняття *лінія* і *поверхня*. Розуміють, що пряма – окремий вид ліній, а площина – вид поверхонь (мал. 43). Однак пояснити, що таке лінія і що таке поверхня, надто важко.

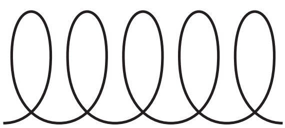
Різних ліній існує безліч, деякі з них мають окремі назви: коло, ламана, парабола, спіраль, гвинтова лінія (мал. 44). Відрізок, промінь, пряма – простіші приклади ліній. І різних поверхонь безліч: сфера, циліндрична, конічна, многогранна. Існують і досить цікаві поверхні: «лист Мебіуса» (мал. 45, *а*), «пляшка Клейна» (мал. 45, *б*) тощо. Їх розглядають у вищій геометрії. Площина та її частини (кут, смуга, трикутник, круг) – приклади простіших поверхонь.



Мал. 42



Мал. 43



Мал. 44

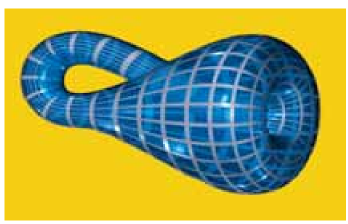
Символи $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ використовують не лише в геометрії. Це – важливі символи теорії множин, на основі якої будують усю сучасну математику. Їх читають:

$\in$ – є елементом;
$\notin$ – не є елементом;
$\subset$ – є частиною (підмножиною);
$\not\subset$ – не є підмножиною.

Крім зазначених, часто використовують інші символи: $\varnothing$ – порожня множина; $\cup$ – об'єднання множин; $\cap$ – переріз множин.

Наприклад, якщо пряма a і площина α не мають спільних точок, то $a \cap \alpha = \varnothing$. $a \cup \alpha$ – множина точок (фігура), якій належать усі точки прямої a і площини α (мал. 40, *б*).

а)



б)

Мал. 45

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Поясніть походження слова *стереометрія*.
2. Які фігури називають неплоскими?
3. Які поняття в стереометрії приймають без означень?
4. Що означають записи: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$?
5. Що означають записи: $a \subset \alpha$, $a \not\subset \beta$?

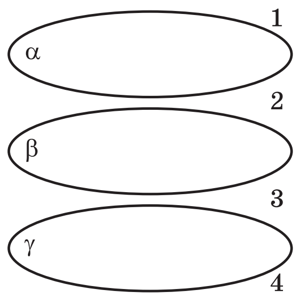
Виконаємо разом

1. Дано пряму c і площину α. Яким може бути $c \cap \alpha$?

   РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо пряма c не має спільних точок з площиною α, то $c \cap \alpha = \varnothing$. Якщо пряма c перетинає площину α в точці A, то $c \cap \alpha = A$. Якщо пряма c лежить у площині α, то $c \cap \alpha = c$.

2. На скільки частин можуть поділити простір три різні площини?

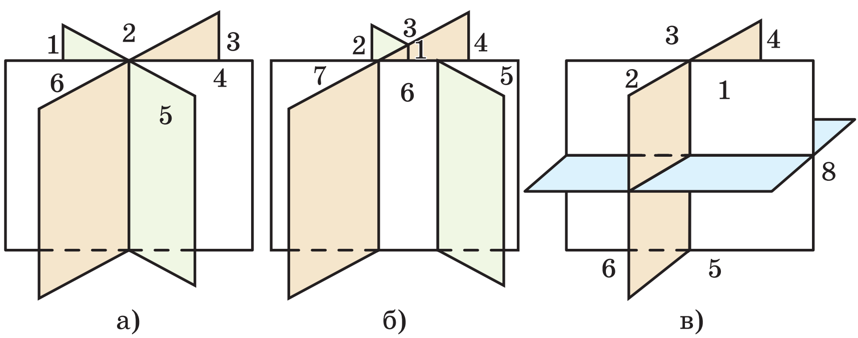
   РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо жодні дві з трьох даних площин не мають спільних точок (мал. 46), то вони поділяють простір на 4 частини. В інших випадках три площини можуть ділити простір на 6, 7 чи 8 частин (мал. 47).



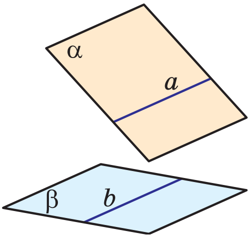
Мал. 46

3. На прямій дано 27 різних точок. На скільки частин вони ділять пряму?

   РОЗВ'ЯЗАННЯ. Одна внутрішня точка ділить пряму, промінь чи відрізок на 2 частини, дві точки – на 3 частини і т. д. Зі збільшенням на одиницю



Мал. 47



Мал. 48

числа точок на прямій збільшується на одиницю і кількість частин прямої. Отже, 27 різних точок прямої ділять її на 28 частин. Дві із цих частин – промені, а решта – відрізки.

4. Чи правильні записи $a \in \alpha$, $b \in \beta$ (мал. 48)?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Ні. Слід писати $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

101. Наведіть приклади геометричних фігур:
а) плоских;
б) неплоских.

102. Чи є геометричними фігурами фігури вищого пілотажу, які виконують льотчики? А шахові фігури?

103. Чи відрізняються поняття «площина» і «площа»?

104. Які з перелічених фігур неплоскі: відрізок, коло, призма, циліндр, прямий кут, прямокутний трикутник, прямокутний паралелепіпед, площина?

105. Скільки спільних точок можуть мати:
а) дві прямі;
б) пряма і площина;
в) дві площини?

106. Скільки спільних точок можуть мати:
а) пряма і відрізок;
б) пряма і коло;
в) коло і площина?

А

107. Намалюйте площину α і точку M, що лежить у ній. Запишіть це за допомогою символів.

108. Намалюйте площину β, що проходить через пряму x. Запишіть це за допомогою символів.

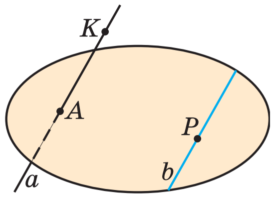
109. Намалюйте площину α і пряму c, які перетинаються у точці M. Скільки точок прямої c лежить у площині α?

110. Намалюйте площини α і ω, що перетинаються по прямій m.

111. Пряма a лежить у площині α, а пряма b – у площині β (мал. 48). Чи випливає із цього, що прямі a і b не лежать в одній площині?

112. Пряма a проходить через точку A площини α. Чи випливає з цього, що пряма a перетинає площину α?

113. Запишіть за допомогою символів взаємне розташування точок, прямих і площин, зображених на малюнку 49.



Мал. 49

114. Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Запишіть за допомогою символів відповіді на запитання:

а) По якій прямій перетинаються площини: 1) (ABC) і (AA_1D_1); 2) (AA_1B_1) і (AA_1D); 3) (BB_1C_1) і (CC_1D_1)?

б) Яким площинам належить точка: 1) A; 2) C_1; 3) D?

в) Чи належить точка B_1 площині: 1) (ABC); 2) (BB_1C_1); 3) $(A_1B_1C_1)$?

115. Накресліть трикутну піраміду $ABCD$. Запишіть за допомогою символів відповіді на запитання:

а) по якій прямій перетинаються площини (ABC) і (ABD)?

б) якій площині не належить точка B?

в) яким площинам належить пряма AC?

Б

116. Площини α, β, пряма a і точка A задовольняють такі умови: $a \subset \alpha$, $a \subset \beta$, $A \in \beta$, $A \notin \alpha$. Зобразіть це на малюнку.

117. Площини α, β, γ попарно перетинаються по прямих a, b і c, причому $a \parallel b$ і $b \parallel c$. Зобразіть це на малюнку.

118. Пряма a перетинає площину α в точці A. У площині α дано ще точку B. Площина β проходить через пряму a і точку B. Зробіть відповідний малюнок.

119. Точки A і B лежать у площині α, а точка C – поза нею. Намалюйте площину, в якій лежать усі три точки.

120. На скільки частин розділяється простір двома площинами?

121. На скільки частин можуть розділити простір чотири площини?

122. ***ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ.*** Зробіть з цупкого паперу чи картону модель площин, що перетинаються.

Вправи для повторення

123. На скільки частин розбивають площину три різні прямі?

124. Чи лежать точки M, N, K на одній прямій, якщо:

а) $MN = 5\frac{11}{15}$ м, $MK = 11{,}65$ м, $NK = 5\frac{11}{25}$ м;

б) $MN = 17$ см, $NK = 21{,}5$ см, $MK = 5{,}5$ см?

125. Об’єм куба дорівнює 8 см^3. Знайдіть площу його поверхні.

§4 АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ І НАСЛІДКИ З НИХ

У справедливості математичних тверджень переконуються за допомогою *доведень*. Довести дане твердження – означає показати, що воно випливає з інших тверджень, істинність яких уже встановлено. Твердження, які доводять, називають *теоремами*.

Не кожне геометричне твердження можна довести. Коли виклад геометрії тільки починається, неможливо вивести наслідки з інших тверджень, оскільки їх (інших тверджень) ще немає. Ось чому кілька перших тверджень приймають без доведення. Їх називають *аксіомами*.

За геометричні аксіоми зазвичай приймають твердження, які відповідають формам і відношенням, що спостерігаються в матеріальному світі. У справедливості цих тверджень люди переконалися в результаті багатовікової практичної діяльності.

На будь-якій площині, як вона не була б розташована у просторі, виконуються всі аксіоми планіметрії. Але для стереометрії одних цих аксіом недостатньо. Потрібні аксіоми, що виражають основні властивості точок, прямих і площин у просторі. Сформулюємо їх.

C_1. У просторі існує (принаймні одна) площина і точка, що не лежить у цій площині.

C_2. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

C_3. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.

C_4. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

ЗАУВАЖЕННЯ. Ніяких інструментів, якими можна було б проводити у просторі площини, немає. Тому вираз «можна провести» в аксіомі C_2 вжито в розумінні «існує». В аксіомі C_4 слова «яка проходить через цю точку» не обов'язкові. Але сформульованою так аксіомою зручніше користуватися.

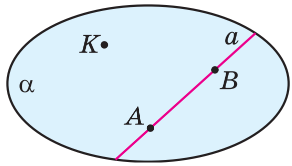
Розглянемо найважливіші наслідки з аксіом стереометрії.

У просторі є безліч точок. Адже простір містить площину (аксіома C_1), а з планіметрії відомо, що множина точок площини нескінченна.

З аксіом C_1 і C_2 випливає, що в просторі є безліч площин. У кожній з них існують прямі, відрізки, кути, кола та інші плоскі фігури. Отже, всі вони є і в просторі.

Два наслідки з аксіом стереометрії сформулюємо у вигляді теорем.

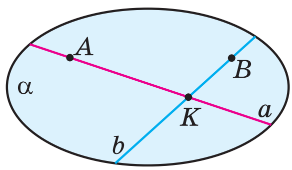
Теорема 1. ***Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.***



Мал. 50

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано пряму a і точку K, що не лежить на ній (мал. 50). Позначимо на прямій a дві довільні точки A і B. Точки A, B і K не лежать на одній прямій, тому через них можна провести площину α (аксіома C_2). Точки A і B прямої a лежать у площині α, отже, і вся пряма a лежить у цій площині (аксіома C_3). Як бачимо, через пряму a і точку K одну площину провести можна. А чи можна провести ще одну? Якби це було можливо, то через точки A, B і K проходили б дві площини. Останнє суперечить аксіомі C_2. Отже, через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести тільки одну площину.

Теорема 2. ***Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну.***



Мал. 51

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано прямі a і b, що перетинаються в точці K (мал. 51). Позначимо на них точки A і B, відмінні від K. Через точки A, B і K можна провести площину α (аксіома C_2). Прямі a і b лежать у площині α (аксіома C_3). Отже, через прямі a і b площину провести можна.

Припустимо, що через дані прямі a і b можна провести ще площину β, відмінну від α. У такому разі через точки A, B і K, що не лежать на одній прямій, проходять дві різні площини. Це суперечить аксіомі C_2. Отже, через дві прямі, які перетинаються, можна провести тільки одну площину.

З аксіоми C_2 і доведених теорем випливає, що площину можна задати:

1) трьома точками, що не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, що не лежить на ній;
3) двома прямими, які перетинаються.

Про задання площини двома паралельними прямими див. на с. 67.

Для допитливих

Ви вже знаєте, що в геометрії є геометричні поняття, відношення і твердження. Приклади геометричних понять: *точка*, *промінь*, *відрізок*, *площина*, *коло*, *куб*, *площа*, *об'єм* тощо. Приклади відношень: *належить*, *паралельно*, *перпендикулярно*, *лежить між* і т. ін. Зміст поняття або відношення розкривають за допомогою означення. Тому нерідко відношення вважають окремим видом понять.

Не кожне поняття і не кожне відношення можна означити за допомогою інших уже відомих понять, тому деякі з них приймають без означень. Їх називають *неозначуваними* поняттями. Не кожне твердження можна довести, тому деякі твердження приймають без доведення. Їх називають *аксіомами*.

Строгі наукові курси геометрії будують за такою схемою. Спочатку називають неозначувані поняття і формулюють аксіоми. Після того за допомогою означень поступово вводять інші поняття (і відношення) і доводять інші важливіші твердження. Такий виклад геометрії називають *аксіоматичним*. (Детальніше див. про це на с. 215).

Системи неозначуваних понять і аксіом можуть бути різними. У нашому підручнику неозначуваними вважаються поняття: *точка*, *пряма*, *площина* і відношення: *належить*, *не належить*, *лежить між*, *перетинаються* та деякі інші.

Кожний строгий аксіоматичний курс геометрії досить громіздкий і важкий. Наш курс також побудовано на аксіоматичній основі, але – не строгій. У ньому доводяться не всі теореми, а тільки найважливіші. А ще, аби полегшити сприймання, у ньому розглядаються деякі стереометричні поняття, відомі вам з попередніх класів, наприклад *куб*, *куля*, *грань*, *множина*, *простір* тощо. Простір – це множина всіх точок (універсальна множина).

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Наведіть приклади геометричних понять.
2. Наведіть приклад геометричного твердження.
3. Що таке аксіома?
4. Сформулюйте аксіоми стереометрії.
5. Сформулюйте і доведіть наслідки з аксіом стереометрії.
6. Як можна задати площину в просторі?

Виконаємо разом

1. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що ніякі три з них не лежать на одній прямій.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Припустимо, що які-небудь три з даних точок, наприклад A, B, C, лежать на одній прямій. Через цю пряму і точку D можна провести площину α (теорема 1). Усі чотири дані точки лежать у площині α. А це суперечить умові задачі. Отже, ніякі три з даних точок не можуть лежати на одній прямій.

2. Доведіть, що через будь-які дві точки простору можна провести пряму і до того ж тільки одну.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай A і B – довільні точки простору. Через них і яку-небудь третю точку проведемо площину α. У цій площині через точки A і B можна провести єдину пряму a.

Припустимо, що через точки A і B у просторі проходить ще пряма a_1, відмінна від a. Її точки A і B лежать у площині α, тому і пряма a_1 лежить в α (аксіома C_3). Виходить, що через точки A і B у площині α проходять дві різні прямі a і a_1. Це суперечить планіметричній аксіомі 2 (див. с. 6). Отже, через точки A і B у просторі можна провести тільки одну пряму.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

126. Скільки спільних точок можуть мати дві площини?

127. Два кінці відрізка належать площині. Чи належать цій площині інші точки відрізка?

128. Дві різні точки відрізка не належать площині. Чи може яка-небудь точка відрізка лежати на цій площині?

129. Один кінець відрізка належить площині, інший не належить. Скільки спільних точок мають відрізок і площина?

130. Чи можна провести площину через три (чотири) точки, які лежать на одній прямій?

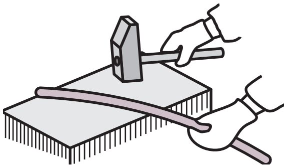
131. Через три точки проведено дві різні площини. Як розміщені ці точки?

132. Чи можуть належати даній площині: а) тільки дві вершини ромба; б) тільки три вершини ромба?

133. З а д а ч а - ж а р т. Три ластівки розлетілися в різні боки. За яких умов вони будуть в одній площині?

134. Вугільний пласт зазвичай залягає так, що його верхня межа (у грубому наближенні) є частиною площини. Яку найменшу кількість свердловин слід пробурити, щоб визначити, як розміщено пласт?

135. Щоб перевірити, чи добре оброблено плоску поверхню, у різних її місцях прикладають вивірену лінійку і



Мал. 52

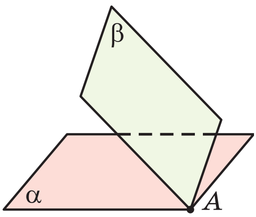
дивляться, чи немає зазору між ними. У якому випадку кажуть, що поверхня «неплоска»? Чому?

136. Якщо не всі точки дроту дотикаються до плоскої поверхні ковадла, дріт «непрямий». Чому? Щоб вирівняти його, б'ють молотком по його опуклостях, як показано на малюнку 52. Після кількох ударів дріт перевертають. Навіщо?

А

137. Доведіть, що в просторі існує безліч площин.

138. Площини α і β мають спільну точку A (мал. 53). Чи мають ці площини спільні точки, відмінні від A? Скільки їх? Зобразіть їх на малюнку.



Мал. 53

139. У площині α лежать точки A і B, у площині β – точки B і C, у площині γ – точки A, B і C. Зробіть відповідний малюнок.

140. Доведіть, що через будь-яку точку простору можна провести площину. Скільки площин можна провести через дану точку?

141. Прямі a і b не мають спільних точок. Чи випливає з цього, що через них не можна провести площину?

142. Скільки площин можна провести через дві дані точки? Зобразіть відповідний малюнок.

143. Чотири точки не лежать в одній площині. Скільки площин можна провести через трійку цих точок?

144. Точка A належить площині α, а B не належить. Чи належить площині α середина відрізка AB?

145. Дано пряму a і точку B, що не лежить на ній. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку B і перетинають a, лежать в одній площині.

146. Дві вершини і точка перетину діагоналей трапеції належать площині α. Як розміщені дві інші вершини трапеції відносно α?

147. Вершини A і B ромба $ABCD$ і точка перетину його діагоналей лежать у площині α. Доведіть, що $C \in \alpha$, $D \in \alpha$.

148. Вершина A і медіана BM трикутника ABC належать площині α. Чи належить цій площині висота CN?

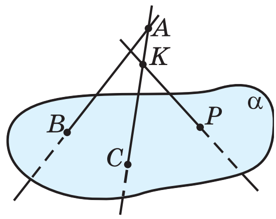
149. Три вершини трикутника лежать у площині α. Доведіть, що кожна точка цього трикутника лежить у площині α.

150. Три різні точки трикутника ABC лежать у площині α. Чи випливає з цього, що кожна точка трикутника ABC лежить у площині α?

151. Прямі MA і MB перетинаються в точці M. Доведіть, що всі прямі, які їх перетинають, але не проходять через точку M, лежать в одній площині. Чи можна через точку M провести пряму, яка не лежить у цій площині?

Б

152. Прямі AB, AK і KP перетинають площину α в точках B, C і P, як показано на малюнку 54. Чи перетинаються прямі AB і KP?



Мал. 54

153. Доведіть, що існує: а) пряма, яка перетинає дану площину; б) площина, що перетинає дану площину.

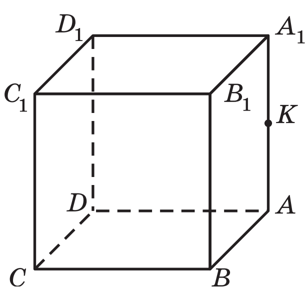
154. На малюнку 55 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K – середина ребра AA_1. Площини яких граней куба перетинає пряма BK? А пряма CK?

155. Прямі a, b, c лежать у площині α. На них взято точки $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, які належать площині β. Доведіть, що точки A, B, C лежать на одній прямій.

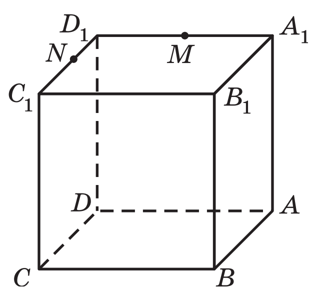
156. Площини α і β перетинаються по прямій a. У площині β взято пряму b, яка перетинає площину α в точці K. Доведіть, що $K \in a$.

157. Використовуючи малюнок 55, побудуйте точку перетину: а) прямої D_1K з площиною (ABC); б) прямої BK з площиною $(A_1B_1C_1)$.

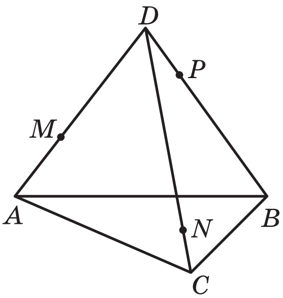
158. Накресліть малюнок 56 у зошит і побудуйте: а) точку перетину прямих MN і A_1B_1; б) точку перетину прямої MN з (B_1BC); в) лінію перетину площин (MNB) і (BB_1D_1); г) лінію перетину площин (MND) і (AA_1D).



Мал. 55



Мал. 56



Мал. 57

159. Точки A, B, C, D, які не лежать на одній площині, попарно сполучені відрізками. $M \in AD$, $N \in CD$, $P \in BD$ (мал. 57). Накресліть малюнок 57 у зошиті й побудуйте: а) точку перетину прямих MN і AC; б) точку перетину прямої MP з (ABC); в) точку перетину прямої NP з (ABC); г) лінію перетину площин (MNP) і (ADB).

160. Уявіть, що на малюнку 57 точка N може змінювати положення на прямій CD. Визначте точку перетину прямої MN з площиною (ABC). Чи завжди така точка існує?

161*. Доведіть, що в просторі існують прямі, які не лежать в одній площині.

162*. Дано дві прямі, які не лежать в одній площині. Через кожну з них проведено площину, що перетинає другу пряму. Доведіть, що пряма перетину цих площин перетинає кожну з даних прямих.

163*. Дано n прямих. Доведіть, що в просторі є точки, які не лежать на жодній із цих прямих.

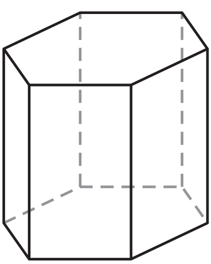
Вправи для повторення

164. Зобразіть: $\alpha \cap \beta = l$, $a \subset \alpha$, $M \in \alpha$, $K \in \alpha$, $K \in \beta$.

165. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $F \in CC_1$. Яким площинам належить точка F?

166. Діагональ грані куба дорівнює d. Знайдіть його об'єм.

§5 МНОГОГРАННИКИ ТА ЇХ ПЕРЕРІЗИ



Мал. 58

Розглянуті в попередньому параграфі способи задання площин часто використовують під час побудови перерізів многогранників. Властивості многогранників та їх види ґрунтовно вивчатимуться в 11-му класі, але з курсу геометрії 9-го класу вам уже відомі два види многогранників: призма і піраміда.

Призма – це многогранник, дві грані якого – рівні n-кутники з відповідно паралельними сторонами, а всі інші n граней – паралелограми. Два *n*-кутники – *основи призми*, решта граней – *бічні грані*. На малюнку 58 зображено шестикутну призму. Ребра призми, які не є сторонами її основ, називають *бічними ребрами*. Усі бічні ребра призми попарно паралельні й рівні.

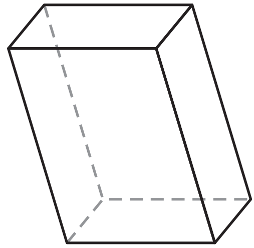
Окремі види призми – *паралелепіпед* і *куб*. У паралелепіпеда всі грані паралелограми (мал. 59), а в куба – рівні квадрати. Якщо всі грані паралелепіпеда – прямокутники, його називають *прямокутним паралелепіпедом* (мал. 60). Він має 6 граней, 12 ребер, 8 вершин. Записуючи «паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$», мають на увазі, що його основи $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, а бічні ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.

Піраміда – многогранник, одна грань якого – довільний многокутник, а всі інші грані – трикутники, що мають спільну вершину. Якщо основою піраміди є трикутник, чотирикутник, ..., то її називають відповідно трикутною, чотирикутною, ... пірамідою. На малюнку 61 зображено чотирикутну піраміду $SABCD$. Трикутну піраміду називають також тетраедром.

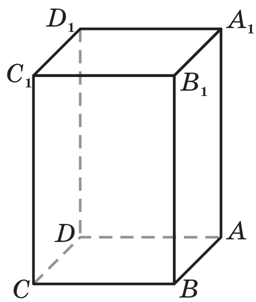
Тетраедр – чотиригранник (грец. *тетра* – чотири). Він має 4 грані, 6 ребер, 4 вершини (мал. 62).

Усі грані тетраедра – трикутники. Якщо всі вони – правильні трикутники, його називають *правильним тетраедром*.

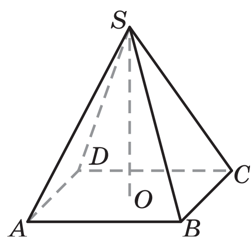
Що таке переріз многогранника? Якщо жодна з двох точок не належить площині, а відрізок, що їх сполучає, має з цією площиною спільну точку, то кажуть, що дані точки лежать по різні боки від площини. А якщо принаймні дві точки многогранника лежать по різні боки від площини, кажуть, що площина перетинає многогранник. У цьому разі її називають *січною площиною*. Фігура, яка складається з усіх точок, спільних для многогранника і січної площини, називається *перерізом многогранника* даною площиною. На



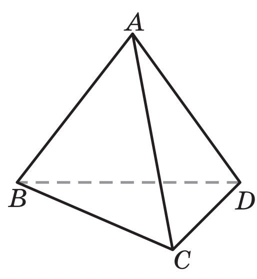
Мал. 59



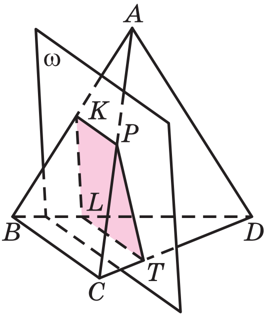
Мал. 60



Мал. 61



Мал. 62

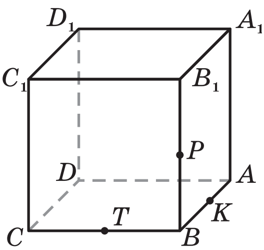


Мал. 63

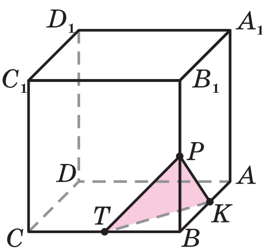
малюнку 63 зображено тетраедр $ABCD$ і січну площину ω. Точки A і B лежать по різні боки від січної площини. Плоский чотирикутник $KPTL$ – переріз даного тетраедра площиною ω.

Щоб побудувати переріз многогранника площиною, треба задати цю площину: вказати три (що не лежать на одній прямій) точки, через які проходить ця площина, або точку і пряму тощо.

ПРИКЛАД 1. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки K, P, T – середини ребер AB, BB_1 і BC (мал. 64, *а*).



а)



б)

Мал. 64

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Точки K, P, T не лежать на одній прямій, тому задають деяку площину. Треба на зображенні куба побудувати зображення шуканого перерізу.

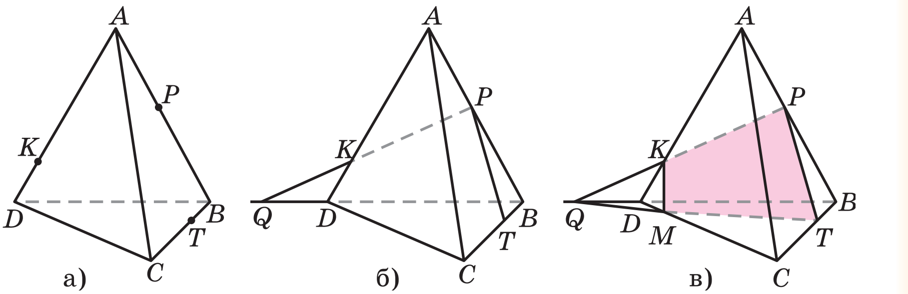
Точки K і P лежать у площині грані ABB_1A_1 куба і в січній площині. Отже, ці площини перетинаються по прямій KP. Січна площина перетинає квадрат ABB_1A_1 по відрізку KP. Аналогічно переконуємося, що дві інші грані куба січна площина перетинає по відрізках KT і TP. Побудувавши їх, дістанемо трикутник KPT. Це і є шуканий переріз (мал. 64, *б*).

Іноді в задачах потрібно не тільки побудувати переріз, а й знайти його площу або периметр. Для цього треба знати розміри даної фігури. Наприклад, якщо довжина ребра розглядуваного куба a, то $BK = BP = BT = \dfrac{a}{2}$, $KP = PT = TK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Отже, площа знайденого перерізу $S = \dfrac{KP^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}a^2$.

ПРИКЛАД 2. На ребрах тетраедра $ABCD$ дано точки K, P, T, як показано на малюнку 65, *а*. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через дані точки.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Проводимо відрізки KP і PT.

Щоб побудувати інші сторони шуканого перерізу, знайдемо точку, в якій січна площина KPT перетинає ребро CD. Прямі KP і BD лежать у площині (ABD) і не паралельні, отже,



Мал. 65

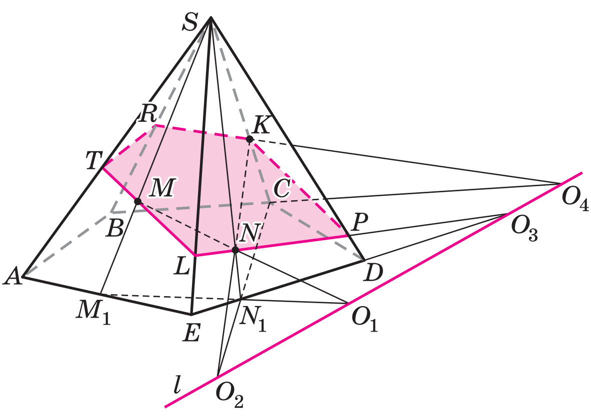
перетинаються у деякій точці Q (мал. 65, *б*). Точка Q належить площинам (KPT) і (BCD). І точка T належить цим площинам. Тому кожна точка прямої QT належить січній площині, у тому числі й точка M, в якій перетинаються прямі CD і QT. Визначивши точку M, сполучаємо її відрізками з K і T. Чотирикутник $KPTM$ – шуканий переріз (мал. 65, *в*).

Цей метод побудови перерізів називається *методом слідів*.

Слід січної площини в площині α – це пряма, по якій січна площина перетинає площину α. Точка, в якій січна площина перетинає пряму, – слід січної площини на цій прямій.

У даному випадку пряма QT – слід січної площини в площині основи BCD. З означення сліду випливає, що кожна його точка – це точка перетину прямих, одна з яких належить січній площині, а друга – площині грані многогранника. Саме цю властивість використовують для побудови перерізів многогранників методом слідів.

ПРИКЛАД 3. Побудуйте переріз п'ятикутної піраміди $SABCDE$ площиною, яка проходить через точки M, N, K, де $M \in (ASE)$, $N \in (SED)$, $K \in SC$ (мал. 66).



Мал. 66

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Проведемо прямі SM і SN, які перетинають сторони AE і ED у точках M_1 і N_1. Пряма MN належить січній площині, а пряма M_1N_1 – площині основи. Прямі MN і M_1N_1 лежать в одній площині (M_1SN_1). Якщо вони не паралельні, то перетинаються в деякій точці O_1. Аналогічно будуємо точку O_2 – точку перетину прямих KN і CN_1. Тоді пряма O_1O_2, або l, – слід січної площини в площині основи.

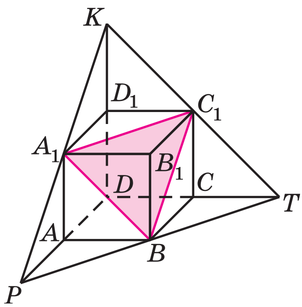
Знайдемо тепер лінії перетину січної площини з гранями піраміди. Продовжимо DE до перетину з l у точці O_3 і проведемо пряму O_3N, яка перетне грань ESD по відрізку LP. Тоді LT і PK – лінії перетину січної площини з гранями ASE і CSD. Продовжимо BC до перетину з l і через утворену точку O_4 проведемо пряму O_4K, яка перетне грань BSC по відрізку KR. Сполучивши точки T і R, отримаємо шуканий переріз $TRKPL$.

Якщо точки M, N і K розташовані так, що пряма MN чи KN не перетинають площину основи піраміди, розв'язання задачі треба змінити. Як це зробити, розглянемо далі.

Для допитливих

Іноді доводиться здійснювати перерізи многогранників площинами, заданими точками, які лежать не на ребрах многогранника, а поза ними.

ЗАДАЧА. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AB = a$) і точки K, P, T такі, що вершини куба D_1, A, C – середини відрізків DK, DP, DT. Побудуйте переріз куба площиною (KPT) і знайдіть площу перерізу.



Мал. 67

РОЗВ'ЯЗАННЯ. На променях DD_1, DA, DC позначимо дані точки K, P, T і сполучимо їх відрізками (мал. 67).

Уявімо, що AM – середня лінія $\triangle PDT$, вона паралельна DT і дорівнює половині DT. Ребро AB даного куба також паралельне DT і дорівнює половині DT. Отже, точка M збігається з B, відрізок PT, а отже, і січна площина, проходить через вершину B куба. Так само можна показати, що січна площина проходить через вершини A_1 і C_1 куба. Отже, розглядуваним перерізом є трикутник A_1BC_1. Сторони цього трикутника – діагоналі рівних квадратів, тому трикутник A_1BC_1 рівносторонній.

Якщо сторона квадрата дорівнює a, то його діагональ $a\sqrt{2}$. Тому шукана площа перерізу:

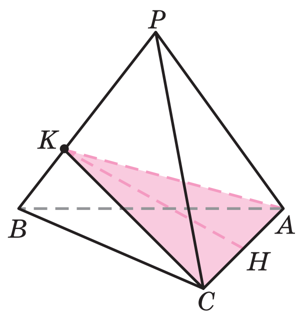
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Наведіть приклади многогранників.
2. Скільки граней, ребер і вершин має куб? А паралелепіпед?
3. Скільки граней, ребер і вершин має тетраедр?
4. Що таке січна площина?
5. Скількома точками можна задати січну площину?
6. Що називається перерізом многогранника?
7. Що таке слід січної площини?

Виконаємо разом

1. Дано правильний тетраедр $PABC$, а на його ребрі PB точку K таку, що $PK=2KB=8$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через ребро AC і точку K. Знайдіть площу перерізу.



Мал. 68

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Сполучимо точку K з точками A і C (мал. 68). Трикутник KAC – шуканий переріз. У $\triangle KAC$: $AK=KC$, оскільки трикутники APK і CPK рівні.

Якщо KH – висота $\triangle AKC$, то $AH=HC$. Знайдемо AC і KH.

Оскільки $PK=2KB=8$, то $KB=4$, $PB=12$. Кожне ребро тетраедра дорівнює 12, тому $CH=6$.

У $\triangle CBK$: $BC=12$, $BK=4$, $\angle KBC=60°$.

Тоді за теоремою косинусів знаходимо:

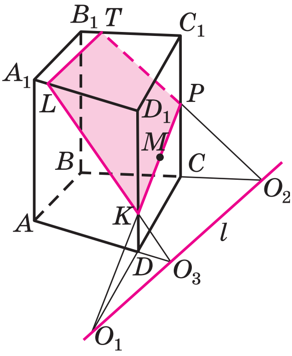
$$CK^2=BC^2+BK^2-2\cdot BC\cdot BK\cdot\cos 60°=$$
$$=12^2+4^2-2\cdot 12\cdot 4\cdot 0{,}5=112.$$

За теоремою Піфагора з $\triangle CHK$ знаходимо KH:

$$KN=\sqrt{CK^2-CH^2}=\sqrt{112-36}=2\sqrt{19}.$$

Отже, шукана площа:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 2\sqrt{19}=12\sqrt{19}.$$



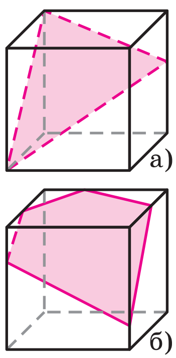
Мал. 69

2. Побудуйте переріз чотирикутної призми площиною, заданою слідом l в площині основи і точкою M грані CC_1D_1D (мал. 69).

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай CD перетинає l в точці O_1. Тоді пряма O_1M перетинає грань CC_1D_1D по відрізку KP. Якщо O_2 – точка перетину BC і l, то PT – лінія перетину січної площини з площиною BB_1C_1C. Аналогічно будуємо відрізок LK ($AD \cap l = O_3$, $O_3K \cap (AA_1D) = KL$). Сполучивши точки L і T, отримаємо шуканий переріз $LTPK$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно



Мал. 70

167. Чи може перерізом прямокутного паралелепіпеда бути прямокутник? А квадрат?

168. Чи може січна площина перетинати всі ребра куба? А всі грані куба?

169. На скільки частин можуть розрізати куб дві січні площини? А три?

170. Чи може бути перерізом куба рівнобедрений трикутник, правильний трикутник, прямокутник, квадрат, трапеція?

171. Доведіть, що перерізом тетраедра не може бути п'ятикутник.

172. Учень намалював переріз куба площиною (мал. 70, *а–б*). Чи є помилка на малюнках?

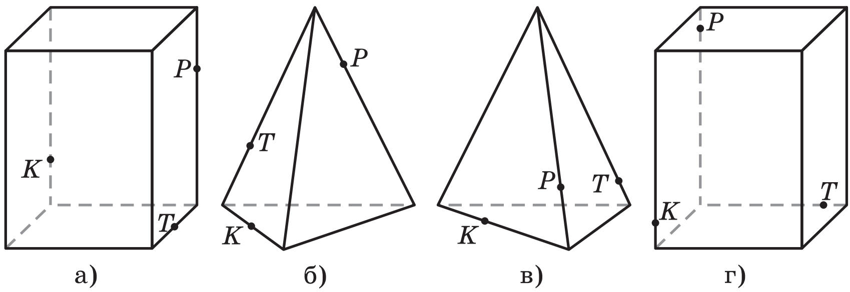
А

173. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через: а) точки A, B_1 і D_1; б) точки A, C і середину ребра DD_1.

174. Точка K – середина ребра AD тетраедра $ABCD$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки B, C і K.

175. Точка M – середина ребра CD тетраедра $ABCD$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму AB і точку M.

176. $ABCD$ – тетраедр. Точки K і M – середини ребер AD і CD. Побудуйте переріз тетраедра площиною (BKM).



Мал. 71

177. Накресліть малюнки 71, *а–г* у зошит і на кожному з них побудуйте переріз многогранника площиною, яка проходить через точки K, P, T.

178. Побудуйте точку перетину прямої з площиною основи чотирикутної піраміди, якщо ця пряма проходить через дві точки, які належать: а) бічним ребрам однієї грані; б) протилежним бічним ребрам; в) бічному ребру і протилежній бічній грані; г) двом суміжним бічним граням; ґ) двом протилежним бічним граням. За якої умови побудова неможлива?

179. Розв'яжіть попередню задачу у випадку шестикутної піраміди.

180. Дано правильний тетраедр, довжина ребра якого a. Побудуйте його переріз площиною, що проходить через середини трьох ребер, які виходять з однієї вершини. Знайдіть периметр і площу перерізу.

181. Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, дорівнюють 6 см, 6 см і 8 см. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через середини цих ребер, і знайдіть його площу.

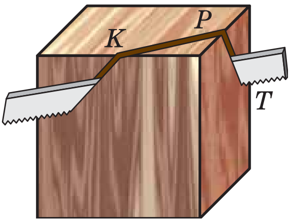
182. Знайдіть периметр і площу перерізу куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AB=a)$ площиною, яка проходить через точки A, C, B_1.

183. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M і N – середини ребер BC і DC, $AB=a$. Знайдіть площу перерізу куба площиною, яка проходить через точки M, N і C_1.

184. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB=a$. Знайдіть периметр і площу перерізу куба площиною, яка проходить через точки M, A, D_1, якщо M – середина A_1B_1.

Б

185. Задайте на ребрах куба три точки так, щоб площина, яка проходить через них, перетинала даний куб по: а) трикутнику; б) чотирикутнику; в) п'ятикутнику.



Мал. 72

186. Дерев'яний куб розпилюють так, що пилка проходить через точки K, P, T, як показано на малюнку 72. Яка фігура буде в перерізі?

187. Ребро куба дорівнює a. Чи може площа перерізу цього куба мати значення, більше за $2a^2$?

188. На ребрах AA_1 і CC_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано точки K і P такі, що $AK = KA_1$, $CP : PC_1 = 1 : 2$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною (D_1KP).

189. Спробуйте перерізати куб площиною так, щоб перерізом став правильний шестикутник. Знайдіть площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

190. Побудуйте переріз чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка задана слідом у площині основи і точкою P, $P \in DD_1$, якщо: а) l не перетинає основу $ABCD$; б) l проходить через точки A і C; в) l перетинає сторони AB і BC.

191. Виконайте попередню задачу, якщо $SABCD$ – чотирикутна піраміда, $P \in SD$.

192. Побудуйте переріз піраміди $SABCDE$ площиною, яка проходить через точки M, N, K, які належать: а) ребрам SA, SC, SE; б) $M \in SB$, $N \in SD$, $K \in (ASE)$; в) $M \in SA$, $N \in SC$, $K \in DE$.

193. Побудуйте переріз п'ятикутної призми площиною, яка проходить через три точки, які лежать на трьох послідовних бічних ребрах.

194. Дано тетраедр $ABCD$, M – середина BC. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки A, D, M, і знайдіть його периметр та площу, якщо $DA = DB = DC = 5$ см, $AB = BC = AC = 6$ см.

195. $ABCD$ – правильний тетраедр, $AB = a$, $BM : MD = 1 : 3$. Знайдіть периметр і площу перерізу, який проходить через точки A, C, M.

196. Дано правильний тетраедр $ABCD$, $AB = l$. AM і AK – медіани, $M \in BC$, $K \in BD$. Знайдіть периметр і площу перерізу, який проходить через точки A, M, K.

197. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $AB = a$, M – середина AA_1, N – середина CC_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, який проходить через точки M, N, B_1.

198. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M, N, K – середини відрізків B_1C_1, C_1D_1 і DD_1 відповідно. Побудуйте переріз куба площиною (MNK) та знайдіть периметр і площу утвореного перерізу, якщо $AA_1 = a$.

199. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка B_1 – середина відрізка BB_2. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки A, B_2 і C.

200. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка B_1 – середина відрізка BB_2, а C – середина відрізка BC_2. Побудуйте переріз куба площиною (AB_2C_2). Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB=a$.

201*. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено відрізок, який сполучає вершину A із серединою ребра CC_1. Побудуйте точку перетину цього відрізка з площиною (BDA_1). У якому відношенні цей відрізок ділиться даною площиною?

202. ***ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ.*** Зробіть з цупкого паперу моделі тетраедра і паралелепіпеда.

Позначте середини трьох ребер многогранника, проведіть через них переріз, накресливши на гранях відповідні відрізки, і обчисліть площі перерізів, виконавши потрібні вимірювання.

Вправи для повторення

203. Три вершини прямокутника належать площині α. Доведіть, що цій площині належить і точка перетину діагоналей прямокутника.

204. M – внутрішня точка грані BCD тетраедра $ABCD$. Побудуйте лінії перетину площини (ADM) з площинами (BCD) і (ABC).

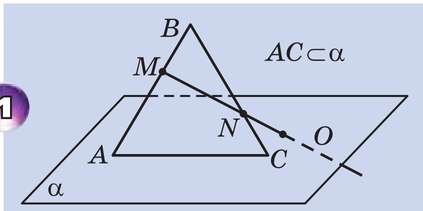
205. З точки M до прямої l проведено перпендикуляр $MO=12$ см і похилі MA, MB, різниця довжин яких дорівнює 7 см. Знайдіть довжини похилих, якщо їх проекції відносяться як $5:16$.

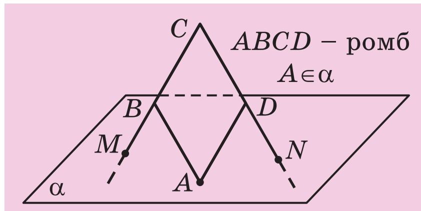
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А	Б

Укажіть помилку на малюнку.

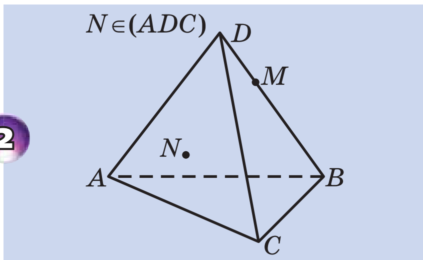
1

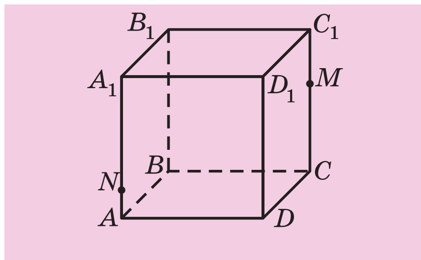




Знайдіть точку перетину прямої MN з (ABC).

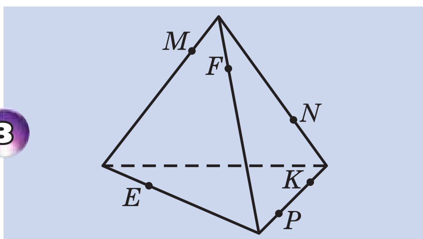
2

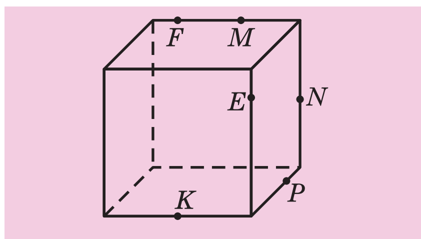




Побудуйте лінію перетину площин (MNP) і (EFK).

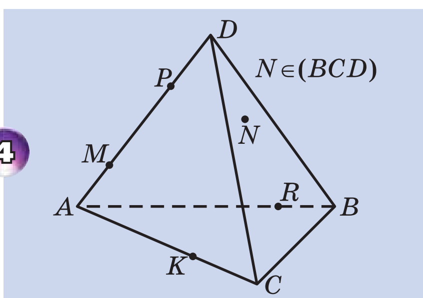
3

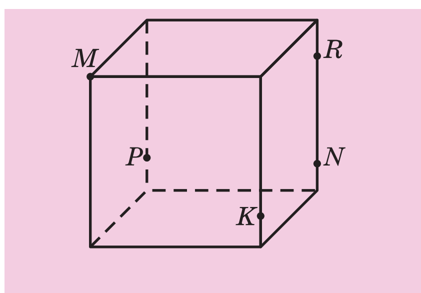




Знайдіть точку перетину прямої MN з (PRK).

4

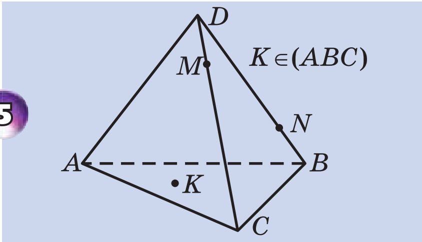


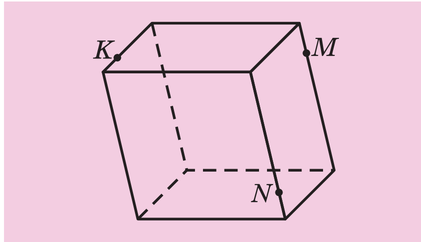


А	Б

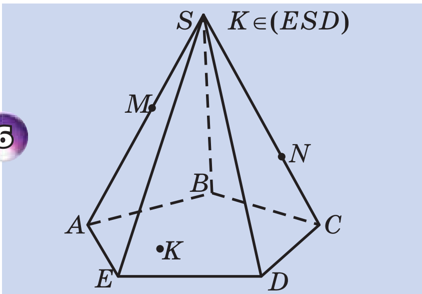
Побудуйте перерізи многогранників площиною, яка проходить через точки M, N, K.

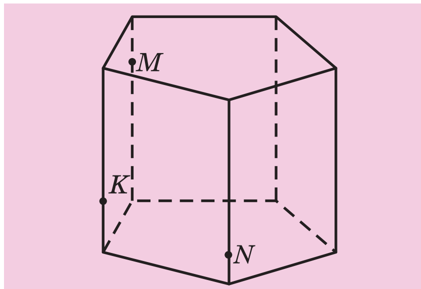
5





6

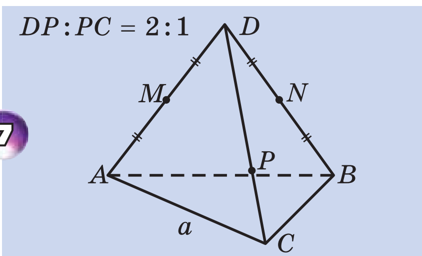


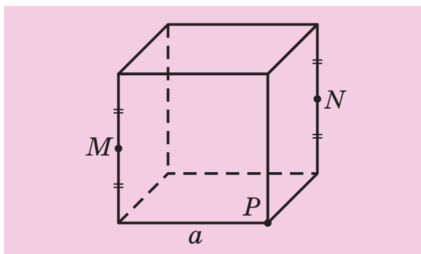


Побудуйте переріз правильного тетраедра і куба площиною (MNP). Знайдіть периметр і площу перерізу.

7

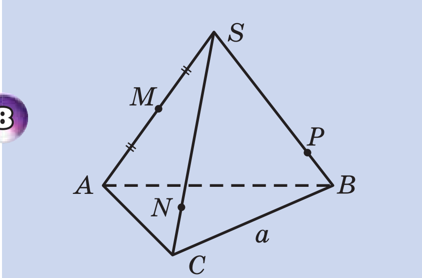
$DP : PC = 2 : 1$



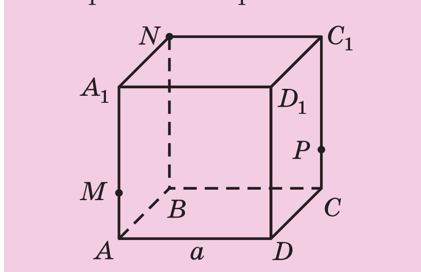


8

$SN : NC = SP : PB = 3 : 1$



$A_1M : MA = C_1P : PC = 3 : 1$



ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Пряма a лежить у площині α. Який знак слід поставити замість зірочки у запису $a*\alpha$?

а) $\in$; б) $\subset$; в) $\cap$; г) $\supset$.

2. Чи можуть дві площини мати тільки одну спільну точку?

а) Так; б) ні; в) не можна встановити;
г) залежить від розташування площин.

3. Скільки площин можна провести через три точки?

а) Одну; б) безліч; в) три; г) одну або безліч.

4. Пряма a перетинає площину β у точці A. Тоді:

а) $A \subset \beta$, $A \in a$; б) $A \in a$, $A \notin \beta$;
в) $A \in \beta$, $A \in a$; г) $A \in \beta$, $A \notin a$.

5. Три прямі попарно перетинаються. Скільки різних площин можна провести через ці прямі?

а) Одну; б) три; в) безліч; г) жодної.

6. Площини α і β перетинаються по прямій m. Пряма a лежить у площині α і перетинає пряму m. Яке взаємне розміщення прямої a і площини β?

а) Перетинаються; б) не мають спільних точок;
в) a лежить у площині β; г) не можна встановити.

7. Пряма a перетинає площину α і лежить у площині β. Скільки спільних точок мають площини α і β?

а) Одну; б) дві; в) жодної; г) безліч.

8. Точки M і N належать ребрам BB_1 і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть лінію перетину площин (BB_1C_1) і (AMN).

а) AM; б) MN; в) DN; г) площини не перетинаються.

9. Бісектриса AL $\triangle ABC$ і центр кола, вписаного в цей трикутник, лежать у площині α. Чи належать цій площині вершини B і C?

а) Так; б) ні; в) одна належить, інша – ні;
г) не можна встановити.

10. Перерізом куба площиною не може бути:

а) трикутник; б) п'ятикутник;
в) шестикутник; г) восьмикутник.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Площина α, прямі a і b та точка A задовольняють такі умови: $a \subset \alpha$, $a \cap \beta = A$. Зобразіть на малюнку всі можливі варіанти.

2. Чи може середня лінія трикутника не лежати в площині цього трикутника? Відповідь обґрунтуйте.

3. Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Точка P не лежить у площині (ABC). Чи можна провести площину через: а) пряму PD та точки B і O; б) пряму AO та точки P і D? Відповідь обґрунтуйте.

4. Побудуйте переріз правильного тетраедра площиною, що проходить через бісектрису грані і протилежну цій грані вершину. Обчисліть площу утвореного перерізу, якщо ребро тетраедра дорівнює 6 см.

5. Дві вершини трикутника лежать у площині α. Чи належить цій площині третя вершина трикутника, якщо відомо, що площині α належить центр кола, описаного навколо трикутника.

6. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки K, L, M, якщо $K \in AA_1$, $L \in CD$, $M \in CC_1$, $AK : KA_1 = 1 : 3$, $DL : LC = 1 : 1$, $CM : MC_1 = 3 : 4$.

7. Точки M і N лежать у бічних гранях тетраедра $ABCD$. Побудуйте точку перетину прямої MN з основою ABC.

8. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте лінію перетину площин (A_1C_1D) і (AD_1C). Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, що знаходиться всередині куба, якщо ребро куба дорівнює a.

9. Точка M лежить у грані APC тетраедра $PABC$. Побудуйте точку перетину прямої BM з площиною (APK), якщо $K \in CB$, $CK : KB = 1 : 2$.

10. Побудуйте переріз п'ятикутної піраміди площиною, яка задана трьома точками, дві з яких належать бічним граням піраміди, а третя – її основі.

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 2

1 Як відомо, при аксіоматичному викладі геометрії кілька перших понять і відношень приймаються без означень, а всі інші означаються. У цьому підручнику за неозначувані прийнято поняття *точка*, *пряма*, *площина*, *простір* і відношення *належати* (точка належить прямій чи площині), *лежати між* (точка A лежить між B і C) та ін.

2 Якщо точка A належить (чи не належить) фігурі F, то пишуть відповідно: $A \in F$ ($A \notin F$).
Якщо пряма a лежить (чи не лежить) у площині α, то пишуть відповідно $a \subset \alpha$ ($a \not\subset \alpha$).

3 Аксіомами тут вважаються всі 10 аксіом площини (див. с. 6) і 4 стереометричні аксіоми (див. с. 44). З такої системи аксіом випливають, зокрема, такі твердження.
У просторі:
– *пряма однозначно визначається двома точками*;
– *площина визначається*:
1) трьома точками, які не лежать на одній прямій (аксіома C_2);
2) прямою і точкою, яка не належить їй (теорема 2);
3) двома прямими, які перетинаються;
4) двома паралельними прямими (означення паралельних прямих).

4 Для наочної ілюстрації розглядуваних геометричних понять і відношень найкраще підходять задачі про *перерізи многогранників* площинами. У цьому розділі даються перші уявлення про простіші многогранники: *призми* (куби, паралелепіпеди) і *піраміди* (зокрема, тетраедри). Задачі на побудови перерізів тут також розглядаються найпростіші, розв'язувати які можна на основі стереометричних аксіом. Зокрема таких.
• Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.
• Якщо дві точки прямої лежать у деякій площині, то і вся пряма лежить у цій площині.

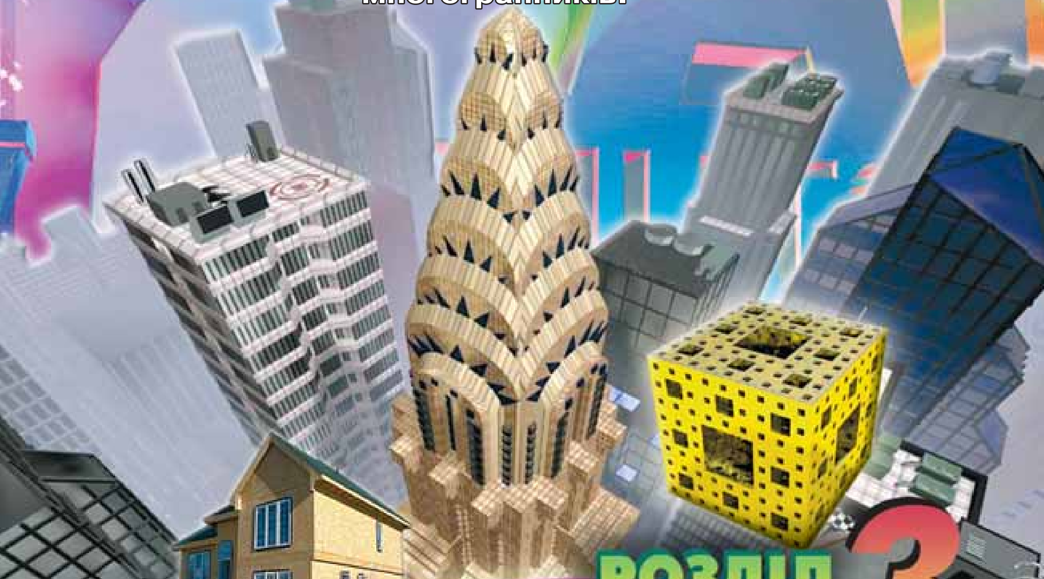
5 Методи складніших побудов перерізів (метод слідів і відповідності) розглянуто в наступних розділах.

Розділ 3

Паралельність прямих і площин у просторі

Основні теми розділу:

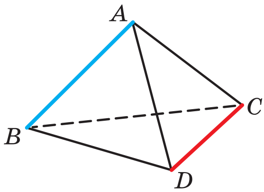
- Мимобіжні і паралельні прямі.
- Паралельність прямої і площини.
- Паралельність площин.
- Паралельне проектування і його властивості.
- Зображення фігур у стереометрії.
- Методи побудови перерізів многогранників.



Геометрія, учителька точності, готує наш розум до глибинних досліджень природи.

Т.Ф. Осиповський

§6 МИМОБІЖНІ І ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

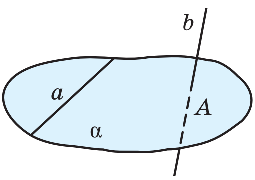


Мал. 73

Якщо дві прямі лежать в одній площині, вони або перетинаються, або паралельні. У стереометрії можливий і третій випадок. Наприклад, якщо $ABCD$ – тетраедр (мал. 73), то прямі AB і CD не перетинаються і не паралельні. Вони не лежать в одній площині.

Дві прямі, які не лежать в одній площині, називають мимобіжними.

Теорема 3 (ознака мимобіжності прямих). ***Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину, але не перетинає першу пряму, то дані прямі мимобіжні.***



Мал. 74

ДОВЕДЕННЯ. Нехай пряма a лежить у площині α, а пряма b перетинає цю площину в точці A, такій, що $A \notin a$ (мал. 74).

Доведемо, що прямі a і b мимобіжні, тобто – не лежать в одній площині. Припустимо, що через прямі a і b можна провести деяку площину β. Вона не збігається з α, оскільки $b \not\subset \alpha$ і $b \subset \beta$. Площини α і β проходять через точку A. За аксіомою C_4 вони повинні перетинатися по прямій, що проходить через точку A. Але вони мають спільну пряму a, яка не проходить через точку A. Отже, зроблене припущення приводить до суперечності. Виходить, що прямі a і b не лежать в одній площині. Що і треба було довести.

Два відрізки називаються мимобіжними, якщо вони лежать на мимобіжних прямих.

Якщо прямі або відрізки a і b мимобіжні, іноді пишуть $a \dot{-} b$.

Дві прямі називаються паралельними, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.

З означення випливає, що через дві паралельні прямі завжди можна провести площину, причому тільки одну. Адже якщо припустити, що через паралельні прямі a і b проведено дві різні площини, то з цього випливало б, що через пряму a

і деяку точку прямої b проведено дві різні площини. Але цього не може бути (теорема 1).

Отже, до перелічених на с. 45 способів задання площини можна додати ще один: площину можна однозначно задати двома паралельними прямими.

З аксіоми паралельності Евкліда випливає, що в площині через дану точку можна провести не більше однієї прямої, паралельної даній. А скільки таких прямих можна провести в просторі?

! **Теорема 4.** ***Через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і тільки одну.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано пряму a і точку A, що не лежить на ній. Через них можна провести єдину площину (теорема 1). У цій площині можна провести пряму, паралельну прямій a, до того ж тільки одну (аксіома Евкліда). Отже, у просторі через дану точку A можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій a.

ЗАУВАЖЕННЯ. Доведена теорема справедлива тільки в евклідовій геометрії. Про неевклідові геометрії дивіться на с. 219.

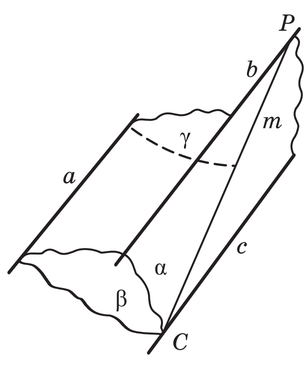
Дві паралельні прямі завжди лежать в одній площині. А три чи більше? Можуть і не лежати в одній площині. Наприклад, усі ребра прямозубої циліндричної шестірні лежать на паралельних прямих, але не належать одній площині. Те саме можна сказати і про поздовжні ребра шпунтових дощок (мал. 75), вертикальні колони будинку тощо.

Мал. 75

! **Теорема 5.** ***Дві прямі, паралельні третій, паралельні.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $a \parallel b$ і $b \parallel c$. Доведемо, що $a \parallel c$. Прямі a і c не можуть перетинатися. Інакше через точку їх перетину проходили б дві різні прямі, паралельні b, що суперечило б теоремі 4.

Припустимо, що прямі a і c – мимобіжні (мал. 76). Через паралельні прямі a і b, b і c проведемо площини γ і α, а через пряму a і яку-небудь точку C прямої c – площину β. Нехай площини α і β перетинаються по прямій m. Прямі b, c і m лежать в одній



Мал. 76

площині α, причому $b \parallel c$. Тому пряма m, яка перетинає c, перетинає в деякій точці P і пряму b. Прямі m і b лежать відповідно у площинах β і γ. Тому їх спільна точка P належить цим площинам, а отже, і їх спільній прямій a. Як бачимо, з припущення випливає, що паралельні (за умовою) прямі a і b мають спільну точку P. Це – суперечність.

Отже, прямі a і c не можуть ні перетинатися, ні бути мимобіжними. Залишається єдино можливе: $a \parallel c$.

Доведену теорему називають теоремою *про транзитивність паралельності прямих* (від лат. *transitivus* – перехідний), оскільки в ній говориться про перехід властивості паралельності двох пар прямих на третю: з $a \parallel b$ і $b \parallel c$ випливає: $a \parallel c$.

Примітка. Щоб ця властивість була правильною завжди, навіть з $a \parallel b$ і $b \parallel a$ випливало, що $a \parallel a$, часто домовляються, що кожна пряма паралельна сама собі.

Паралельними бувають не тільки прямі, а й відрізки, промені. Два відрізки (промені) називають *паралельними*, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій.

Для допитливих

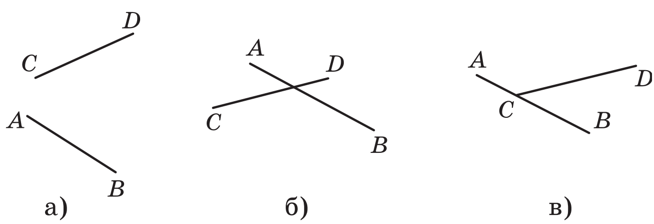
Як можуть розташовуватися в просторі частини двох прямих: відрізки або промені? Оскільки мимобіжні прямі не лежать в одній площині, то й будь-які відрізки чи промені двох таких прямих не лежать в одній площині.

Якщо ж дві прямі простору перетинаються, то їх відрізки можуть не мати спільних точок (мал. 77, *а*) або мати одну спільну точку. Кажуть, що два відрізки перетинаються, якщо вони мають тільки одну спільну точку, яка є внутрішньою точкою для кожного з них (мал. 77, *б*). Відрізки AB і CD не перетинаються (мал. 77, *в*), хоч переріз їх як множин точок не порожній.

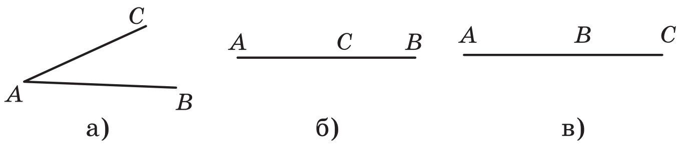
Коли прямі і відрізки розглядають як множини точок, то їх позначають різними символами: (AB) – пряма, $[AB]$ – відрізок.

Переріз множин точок відрізків $[AB]$ і $[AC]$ не порожній: $[AB] \cap [AC]$ може дорівнювати точці A або відрізку AC чи AB (мал. 78).

У геометрії в останніх випадках відрізки не вважають такими, що перетинаються. Коли кажуть, що два відрізки чи промені



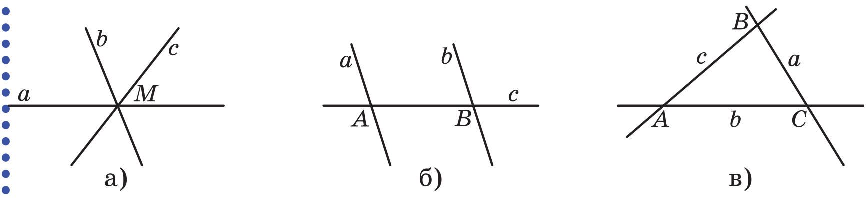
Мал. 77



Мал. 78

перетинаються, то розуміють, що вони мають тільки одну спільну точку, яка не є кінцем відрізка чи початком променя.

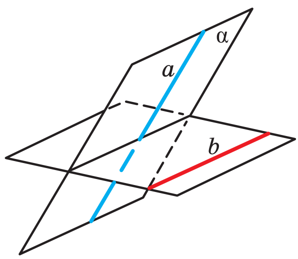
Три прямі у просторі можна розташувати багатьма різними способами. Усі вони можуть перетинатися в одній точці (мал. 79, *а*), одна з них може перетинати дві інші, які не мають спільних точок (мал. 79, *б*), вони можуть перетинатися попарно у трьох різних точках (мал. 79, *в*). У перших двох випадках усі три прямі можуть лежати або не лежати в одній площині; у третьому випадку всі три прямі належать одній площині. Чому?



Мал. 79

Якщо пряма *c* мимобіжна з прямими *a* і *b*, то дві останні прямі можуть перетинатися, бути паралельними або мимобіжними.

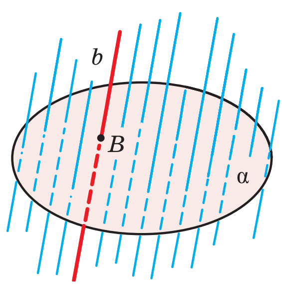
Нехай *a* і *b* – дві довільні мимобіжні прямі (мал. 80). Уявіть, що через кожну точку прямої *a* проведено пряму, паралельну прямій *b*. Усі вони заповнять деяку площину α. Кажуть, що геометричним місцем прямих, які паралельні одній з двох даних мимобіжних прямих і перетинають другу, є площина.



Мал. 80

Якщо пряма *b* перетинає площину α, то геометричним місцем прямих, які паралельні прямій *b* і перетинають площину α, є весь простір (мал. 81).

Площина α розбиває простір на два *півпростори*. Площина α – *межа* півпростору. Зверніть увагу на аналогію: точка розбиває пряму на дві півпрямі (два промені), пряма розбиває площину на дві півплощини.



Мал. 81

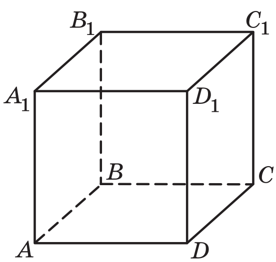
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які дві прямі називають паралельними?
2. Які дві прямі називають мимобіжними?
3. Наведіть приклади мимобіжних прямих, моделюючи їх: двома олівцями, речами, що є в класі.
4. Сформулюйте і доведіть ознаку мимобіжності прямих.
5. Скільки прямих можна провести через дану точку паралельно даній прямій?
6. Сформулюйте теорему про транзитивність паралельних прямих.
7. Які відрізки чи промені називаються паралельними?

Виконаємо разом

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Доведіть, що пряма AB мимобіжна з прямою CC_1 (мал. 82).

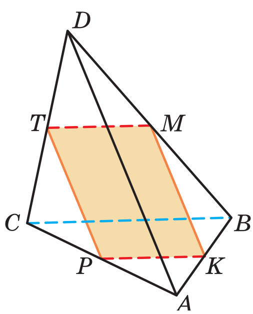
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Пряма CC_1 лежить у площині BCC_1B_1, а пряма AB перетинає цю площину в точці B, яка не лежить на CC_1. Тому згідно з ознакою мимобіжності прямі AB і CC_1 мимобіжні.



Мал. 82

2. K, P, T, M – середини ребер AB, AC, CD, DB тетраедра $ABCD$. Доведіть, що чотирикутник $KPTM$ – паралелограм.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Відрізки KP і MT – середні лінії трикутників ABC і DBC (мал. 83). Тому кожний з них паралельний ребру BC і дорівнює його половині. За властивістю транзитивності відрізки KP, MT паралельні й рівні. Отже, чотирикутник $KPTM$ – паралелограм.



Мал. 83

3. Прямі AB і CD мимобіжні. Чи можуть бути паралельними прямі AC і BD? А перетинатися?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якби прямі AC і BD були паралельними або перетиналися, через них можна було б провести площину. У цій площині лежали б точки A, B, C і D, а отже, і прямі AB і CD. Але за умовою прямі AB і CD не лежать в одній площині. Отже, прямі AC і BD не можуть бути ні паралельними, ні перетинатися.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

206. Чи паралельні відрізки a і c, якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$?

207. Відомо, що $a \subset \alpha$, $b \parallel a$. Чи може пряма b перетинати α?

208. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 82). Назвіть його ребра, які: а) паралельні AA_1; б) перпендикулярні до AA_1; в) мимобіжні з AA_1.

209. Назвіть три пари мимобіжних прямих, на яких лежать ребра тетраедра $ABCD$.

210. $ABCD$ – тетраедр (мал. 83). Чи паралельні його ребра AB і CD? Чи перетинаються прямі AC і BD?

211. Прямі AB і CD паралельні. Чи можуть бути мимобіжними прямі AC і BD? А перетинатися?

212. Чи можна вважати правильним таке означення: «Дві прямі називаються мимобіжними, якщо вони не перетинаються і не паралельні»?

А

213. Попарно паралельні прямі a, b і c перетинають площину α у точках A, B і C, як показано на малюнку 84. Чи належать дані прямі одній площині?

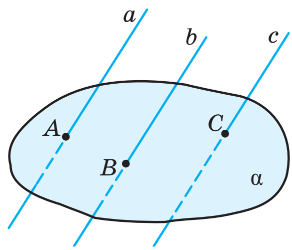
214. Прямі BB_1 і CC_1, зображені на малюнку 85, перетинають пряму A_1B у точках B і C, а площину α – у точках B_1 і C_1. Чи паралельні прямі BB_1 і CC_1?

215. Паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах. Доведіть, що чотирикутник CDD_1C_1 – теж паралелограм.

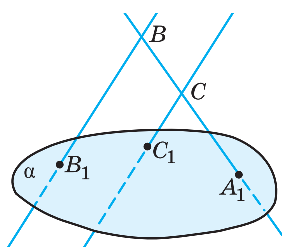
216. Точка M не лежить у площині $\triangle ABC$. Яке взаємне розміщення прямих MA і BC? А прямих EF і PK, якщо точки E і P лежать на прямій MA, а точки F і K – на прямій BC?

217. Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено пряму a, яка не лежить у площині паралелограма, а через точку C – пряму b, яка паралельна BD. Доведіть, що a і b – мимобіжні.

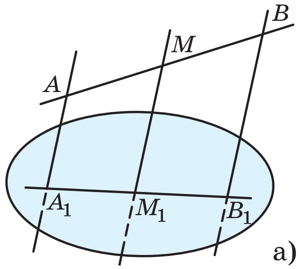
218. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед. Доведіть, що площина (ACC_1) проходить через точку A_1.

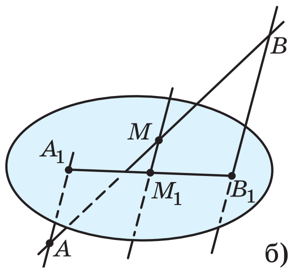


Мал. 84



Мал. 85





Мал. 86

219. Прямі a і b паралельні, а b і c не паралельні. Доведіть, що прямі a і c не паралельні.

220. Доведіть, що паралельні прямі, які перетинають дану пряму, лежать в одній площині.

221. Відрізки OA і OB перетинають площину α в точках A_1 і B_1, які є серединами цих відрізків. Знайдіть відстань AB, якщо $A_1B_1 = 3{,}8$ см.

222. Вершинами трикутника ABC є середини відрізків OA_1, OB_1, OC_1. Точка O не лежить у площині трикутника ABC. У скільки разів периметр трикутника $A_1B_1C_1$ більший від периметра трикутника ABC?

223. Через кінці відрізка AB і його середину M проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину в точках A_1, B_1, M_1 (мал. 86). Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо $AA_1 = 6{,}5$ м, $BB_1 = 8{,}5$ м.

224. З точок A і B площини α проведено поза нею паралельні відрізки $AK = 16$ см і $BM = 12$ см. Пряма KM перетинає площину α в точці C. Знайдіть відстань AC, якщо $AB = 9$ см. Розгляньте два випадки.

225. Точка C ділить відрізок AB у відношенні $AC : CB = 2 : 3$. Паралельні прямі, які проходять через точки A, C, B, перетинають деяку площину в точках A_1, C_1, B_1. Знайдіть відношення $A_1B_1 : A_1C_1$.

226. Через кінець A відрізка AB проведено площину α. Через кінець B і точку C цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і C_1. Знайдіть довжину відрізка CC_1, якщо:

а) $AC : CB = 3 : 2$ і $BB_1 = 16$ дм;
б) $AC_1 : C_1B_1 = 2 : 1$ і $BB_1 = 12$ дм;
в) $AB : BB_1 = 4 : 3$ і $AC = m$.

227. У тетраедрі $ABCD$ точки M, N, P, K – середини відрізків DC, DB, AB, AC. Знайдіть AD і BC, якщо $AD : BC = 3 : 2$, а периметр чотирикутника $MNPK$ дорівнює 10 см.

228. Точки M_1, N_1, P_1, K_1 – середини ребер DB, DC, AB і AC тетраедра $ABCD$. Точки M, N, P, K – середини відрізків DM_1, DN_1, AP_1, AK_1. Знайдіть периметри чотирикутників $MNPK$ і $M_1N_1P_1K_1$, якщо $BC = 20$ см, а $AD = 16$ см.

Б

229. Прямі a і b мимобіжні. Точка M не належить прямим a і b. Чи можна через точку M провести дві прямі, які будуть перетинати прямі a і b?

230. Прямі a і b паралельні. $M \notin a$, $M \notin b$. Через точку M та прямі a і b проведено площини α і β відповідно, які перетинаються по прямій c. Доведіть, що $a \| c$ і $b \| c$.

231. Прямі a і b мимобіжні. $M \notin a$, $M \notin b$. Через точку M та прямі a і b проведено площини α і β відповідно, які перетинаються по прямій c. Яке взаємне розміщення прямих a і c, b і c? Відповідь обґрунтуйте.

232. Площини α і β перетинаються по прямій c. $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \beta$, $D \in \beta$. Прямі AB і c перетинаються у точці M, а CD і c – у точці N. Яке взаємне розміщення прямих AB і CD, якщо: а) точки M і N збігаються; б) точки M і N не збігаються?

233. Дано точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі, які сполучають середини відрізків AB і DC, AD і BC, перетинаються в одній точці.

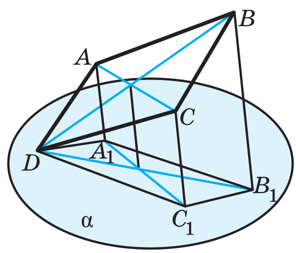
234. Дано точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі, які сполучають середини відрізків AB і CD, AC і BD, AD і BC, перетинаються в одній точці.

235. Через вершину D паралелограма $ABCD$ проведено площину, а через точки A, B, C – паралельні прямі, які перетинають цю площину в точках A_1, B_1, C_1 (мал. 87). Знайдіть BB_1, якщо $AA_1 = 15$ см, $CC_1 = 17$ см.

236. Нехай O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, а α – площина, яка не перетинає паралелограм. Через точки A, B, C, D, O проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1, D_1, O_1. Доведіть, що: а) $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = 4 \cdot OO_1$; б) $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$.

237. Яку фігуру утворюють усі відрізки, що сполучають будь-які точки двох мимобіжних відрізків?

238*. Дано два мимобіжних відрізки. Знайдіть геометричне місце середин відрізків, що сполучають будь-яку точку одного з них з будь-якою точкою другого.



Мал. 87

239*. Доведіть, що в просторі існує принаймні три попарно мимобіжні прямі.

240*. Як побудувати пряму, що перетинає три дані попарно мимобіжні прямі?

Вправи для повторення

241. Побудуйте переріз правильного тетраедра $PABC$ площиною, яка проходить через точки P, M, N, де M і N – середини ребер AC і BC. Знайдіть косинус кута MPN.

242. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, M – середина AA_1. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки B, D, M. Знайдіть діагональ куба, якщо площа перерізу дорівнює $64\sqrt{6}$ см^2.

243. Різниця катетів прямокутного трикутника 7 см, а медіана, проведена з вершини прямого кута, дорівнює 6,5 см. Знайдіть площу трикутника.

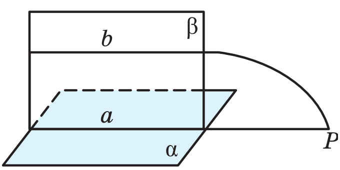
§7 ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Як можуть розташовуватися в просторі пряма і площина? Вони можуть: 1) перетинатися, тобто мати тільки одну спільну точку; 2) не мати жодної спільної точки; 3) кожна точка прямої може лежати в площині. У другому випадку кажуть про паралельність прямої і площини.

Пряма і площина називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Якщо пряма a паралельна площині α, пишуть: $a \parallel \alpha$.

Теорема 6 (ознака паралельності прямої і площини). ***Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій площини, то вона паралельна і самій площині.***



Мал. 88

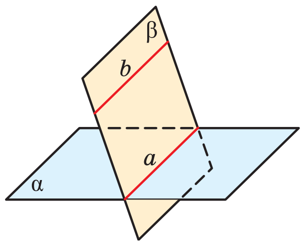
ДОВЕДЕННЯ. Нехай пряма b не лежить у площині α, пряма a лежить в α і $b \parallel a$. Доведемо, що $b \parallel \alpha$.

Припустимо, що пряма b не паралельна площині α, а перетинає її у деякій точці P (мал. 88). Ця точка лежить у площині α і в площині β, яка проходить через паралельні прямі a і b. Отже, точка P лежить на прямій a, по якій перетинаються площини α і β. Прийшли до суперечності: прямі a і b паралельні й одночасно мають спільну точку P.

Отже, пряма b не може перетинати площину α.

Теорема 7. ***Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині, і перетинає цю площину, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $b \parallel \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = a$ (мал. 89). Доведемо, що $a \parallel b$. Якби прямі a і b перетиналися, їх точка перетину була б спільною для прямої b і площини α. Це неможливо, оскільки $b \parallel \alpha$. Отже, прямі a і b не перетинаються, а лежать в одній площині β. Тому $a \parallel b$.



Мал. 89

Відрізок або промінь називається *паралельним* площині, якщо він є частиною прямої, паралельної площині.

Кожне ребро паралелепіпеда паралельне площинам двох його граней. І пряма, проведена в грані бруска за допомогою рейсмуса (мал. 90), – площинам трьох граней. Муляри кладуть стіну під висок, шнур якого паралельний площині стіни. Горизонтальні планки мотовила зернозбирального комбайна хоч і змінюють своє положення під час роботи, залишаються паралельними площині поля. Усе це – матеріальні моделі паралельності прямої і площини.


Мал. 90

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як можуть бути розташовані в просторі пряма і площина?

2. Сформулюйте означення паралельності прямої і площини.

3. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямої і площини.

4. Чи може відрізок або промінь бути паралельний площині?

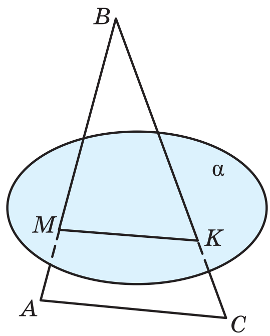
5. Який відрізок називають паралельним площині?

Виконаємо разом

1. Площина перетинає сторони $\triangle ABC$ у точках M і K ($M \in AB$ і $K \in BC$) так, що $AC \parallel \alpha$, $AM : MB = 2 : 5$ (мал. 91). Знайдіть AC, якщо $MK = a$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Оскільки $AC \parallel \alpha$ і $AC \subset (ABC)$, то площина $\triangle ABC$ перетинає площину α по прямій, яка паралельна AC (теорема 7), тобто $MK \parallel AC$. Тоді $\triangle MBK \sim \triangle ABC$. Маємо:

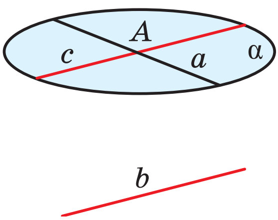
$\frac{MK}{AC} = \frac{MB}{AB}$, звідси $\frac{MK}{AC} = \frac{5}{7}$, а $AC = 1{,}4 \cdot MK = 1{,}4a$.



Мал. 91

2. Доведіть, що через будь-яку з двох мимобіжних прямих a і b можна провести площину α, паралельну іншій прямій.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. На малюнку 92 зображено мимобіжні прямі a і b. Візьмемо на прямій a точку A і проведемо через неї пряму c, паралельну прямій b. Через прямі a і c, що перетинаються, проведемо площину α. Це і є шукана площина.

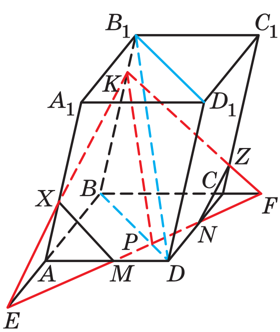


Мал. 92

3. Через середини M і N ребер AD і CD паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину паралельно B_1D. Побудуйте переріз паралелепіпеда цією площиною та встановіть, у якому відношенні вона ділить ребро BB_1.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай у паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M і N – середини ребер AD і CD (мал. 93). Побудуємо площину BB_1D_1D, яка перетинає відрізок MN у точці P. Через точку P у площині BB_1D_1D проведемо $PK \parallel B_1D$.

Знайдемо точку E – точку перетину прямих AB і MN – та проведемо відрізок EK, який перетинає ребро AA_1 у точці X. Аналогічно будуємо відрізок KZ. Провівши відрізки XM і ZN, отримаємо шуканий переріз $MXKZN$.



Мал. 93

Оскільки $ABCD$ – паралелограм, то $BP:PD = 3:1$. Тоді з подібності трикутників B_1BD і KBP випливає, що $BK:KB_1 = 3:1$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

244. Знайдіть серед навколишніх предметів моделі прямих і площин, які паралельні між собою.

245. Спростуйте твердження: «Якщо прямі a, b і площина α такі, що $a \parallel \alpha$ і $b \parallel \alpha$, то $a \parallel b$».

246. Пряма a паралельна прямій b, а b паралельна площині α. Чи випливає з цього, що $a \parallel \alpha$?

247. Кожна з площин α і β паралельна прямій a. Чи можуть ці площини перетинатися?

248. Пряма a перетинає площину α. Скільки можна провести прямих, що: а) перетинають площину α і паралельні прямій a; б) перетинають пряму a і паралельні площині α?

249. Скільки прямих, паралельних даній площині α, можна провести через дану точку A, якщо $A \notin \alpha$?

250. Скільки площин, паралельних даній прямій, можна провести через дану точку?

А

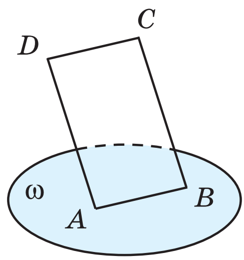
251. $ABCD$ – паралелограм. Площина ω проходить через його вершини A, B і не проходить через вершину C (мал. 94). Доведіть, що $CD \parallel \omega$.

252. Доведіть, що коли площина перетинає трапецію по її середній лінії, то вона паралельна основам трапеції. Зобразіть відповідний малюнок.

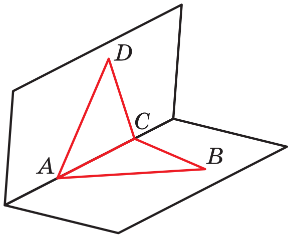
253. Точки A і B лежать у площині α, а O – поза площиною. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків OA і OB, паралельна площині α.

254. Площина α перетинає відрізки AB і AC в їхніх серединах – точках K і P. Доведіть, що відрізок BC паралельний площині α. Як відносяться: а) периметри трикутників ABC і AKP; б) площі трикутників ABC і AKP; в) площі многокутників AKP і $BKPC$?

255. Площини α і β перетинаються по прямій c. Пряма $a \parallel \alpha$ і $a \parallel \beta$. Доведіть, що $a \parallel c$.



Мал. 94



Мал. 95

256. У трикутнику ABC через точку M – середину сторони AB – проведено площину α, $\alpha \parallel BC$, $\alpha \cap AC = N$. Знайдіть: а) BC, якщо $MN = a$; б) $S_{BMNC} : S_{MAN}$.

257. Площина α перетинає середини катетів AB і AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC у точках M і N. Доведіть, що $BC \parallel \alpha$ і знайдіть відношення $P_{BMNC} : P_{MAN}$.

258. Через точку M – середину гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC – проведено площину α, паралельну катету BC, яка перетинає катет AC у точці N. Знайдіть CM, якщо $BC : AC = 6 : 8$, $S_{\triangle AMN} = 24$ см^2.

259. Дано неплоску замкнену ламану $ABCDA$ (мал. 95). Доведіть, що середини всіх її ланок лежать в одній площині.

260. $PABC$ – тетраедр, кожне ребро якого 6 см. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через середину ребра PB паралельно ребрам PA, PC. Знайдіть периметр цього перерізу.

261. Побудуйте переріз тетраедра $PABC$ площиною, паралельною ребру AB, яка проходить через вершину P і середину ребра BC. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = BC = CA = a$, $PA = PB = PC = b$.

262. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB, AD і паралельна прямій CC_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = l$.

263. Побудуйте переріз тетраедра $ABCD$ площиною, яка проходить через середину ребра CB паралельно прямим AC і DB. Визначте вид утвореного перерізу.

264. Побудуйте переріз тетраедра $ABCD$ площиною, яка паралельна прямим AD і BC та проходить через точку M, $M \in AC$, $AM : MC = 2 : 1$. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AD = a$, $BC = b$.

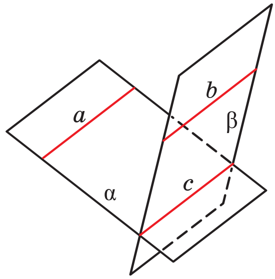
Б

265. Точки B і C не лежать на прямій a. Скільки існує площин, паралельних a, які проходять через точки B і C? Розгляньте всі можливі випадки.

266. Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площину, причому ці площини перетинаються, то лінія їх перетину паралельна кожній з даних прямих (мал. 96). Доведіть.

267. Доведіть, що коли кожна площина, яка перетинає одну з двох даних прямих, перетинає і другу, то ці прямі паралельні.

268. Доведіть, що всі прямі, які перетинають одну з двох мимобіжних прямих і паралельні другій, лежать в одній площині.



Мал. 96

269. Через точку M – середину гіпотенузи AB трикутника ABC – проведено площину α, яка паралельна катету AC і перетинає катет BC у точці N. $BN - NM = a/2$, $CM = a$. Знайдіть $S_{\triangle ABC}$.

270. На бічній стороні AB трапеції $ABCD$ взято точки M_1, M_2, M_3 так, що $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3B$ і через точки M_1, M_2, M_3 проведено площини, які паралельні AD. Ці площини перетинають сторону CD у точках N_1, N_2, N_3. Знайдіть: а) $S_{M_1M_3N_3N_1} : S_{ABCD}$; б) $S_{AM_1N_1D} : S_{M_3BCN_3}$, якщо $AD = a$, $BC = b$.

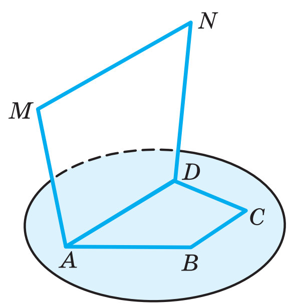
271. Трапеції $ABCD$ і $AMND$ лежать у різних площинах. Побудуйте точку перетину площини BCP і прямої ND, якщо P – довільна точка прямої AM (мал. 97).

272. У тетраедрі $ABCD$ точка M – середина AD, $N \in DB$, $DN : NB = 1 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки M і N паралельно BC. Обчисліть периметр і площу перерізу, якщо всі ребра тетраедра дорівнюють a.

273. Дано тетраедр $ABCD$, у якого $\angle ADC = 90°$, $M \in AD$, $AM : MD = 1 : 3$, $N \in DC$, $DN : NC = 1 : 3$. Знайдіть площу перерізу, який проходить через точки M і N, паралельно BC, якщо $DA = DB = DC = b$, $AB = BC = AC$.

274. Побудуйте переріз тетраедра $ABCD$ площиною, яка проходить через точки C, M ($M \in AB$) і паралельна прямій DE, де E – середина BC.

275. Точка M – середина ребра BB_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки A і M паралельно B_1D. Знайдіть площу перерізу, якщо $AA_1 = a$, $AB = BC = b$.



Мал. 97

276. У похилому паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взято точки $M \in A_1B_1$, $N \in A_1D_1$ такі, що $B_1M : MA_1 = A_1N : ND_1 = 3:1$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки N і M паралельно D_1D. Знайдіть периметр перерізу, якщо всі ребра паралелепіпеда дорівнюють a, $\angle ABC = 120°$.

277. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина ребра AA_1. Через точки M, B, D проведено переріз. Доведіть, що цей переріз паралельний прямій A_1C, та знайдіть площу перерізу, якщо $A_1C = d$.

278*. Через середини M і N ребер AD і CC_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину паралельно B_1D. Побудуйте переріз паралелепіпеда цією площиною та встановіть, у якому відношенні вона ділить ребро BB_1.

Вправи для повторення

279. Дано два паралелограми ABB_1A_1 і ACC_1A_1, які лежать у різних площинах. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

280. На відрізку AB взято точку M таку, що $AM : MB = 1:3$. Через точки A, B, M проведено паралельні прямі, які перетинають площину α у точках A_1, B_1, M_1 відповідно. $AA_1 = 10$ см, $BB_1 = 16$ см. Знайдіть MM_1, якщо: а) відрізок AB не перетинає площину α; б) відрізок AB перетинає площину α.

281. Сторона ромба дорівнює a, а гострий кут α. Знайдіть діагоналі ромба та його площу.

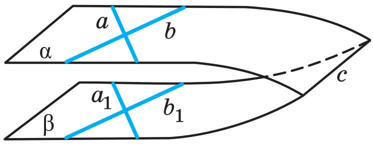
§ 8 ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПЛОЩИН

Дві площини називаються паралельними, якщо вони не перетинаються.

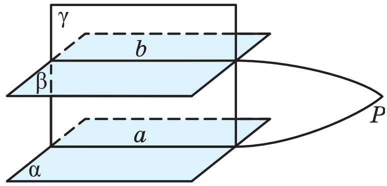
Якщо площини α і β паралельні, пишуть: $\alpha \parallel \beta$.

Теорема 8 (ознака паралельності площин). ***Якщо дві прямі, що перетинаються і лежать в одній площині, паралельні двом прямим другої площини, то такі площини паралельні.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай прямі a і b, що перетинаються, лежать у площині α, а паралельні їм прямі a_1 і b_1 – у площині β (мал. 98). Доведемо, що $\alpha \parallel \beta$.



Мал. 98



Мал. 99

Припустимо, що площини α і β не паралельні, тобто перетинаються по якійсь прямій *c*. Оскільки прямі *a* і *b* паралельні прямим a_1 і b_1 площини β, то згідно з теоремою 6 $a \parallel \beta$ і $b \parallel \beta$.

Прямі *a* і *b* не перетинають *c*, оскільки пряма *c* лежить у площині β, з якою *a* і *b* не мають спільних точок. Лежать усі ці прямі в одній площині α. Виходить, $a \parallel c$ і $b \parallel c$ – дві прямі, які перетинаються і паралельні третій. Це суперечить аксіомі паралельності. Отже, площини α і β не можуть перетинатися, тобто вони паралельні.

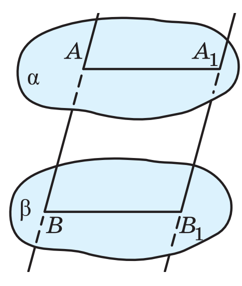
Теорема 9. ***Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай площина γ перетинає паралельні площини α і β по прямих *a* і *b* (мал. 99). Доведемо, що $a \parallel b$.

Припустимо, що прямі *a* і *b* не паралельні. Тоді вони перетинаються в деякій точці *P*, оскільки лежать в одній площині γ. Точка *P* належить прямим *a* і *b*, отже, і площинам α і β, в яких лежать ці прямі. Прийшли до суперечності: паралельні площини α і β мають спільну точку *P*. Отже, прямі *a* і *b* не можуть перетинатися, вони паралельні.

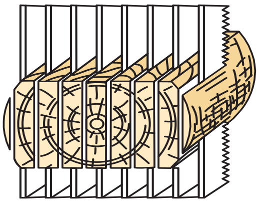
Теорема 10. ***Відрізки паралельних прямих, що відтинаються паралельними площинами, рівні.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай відрізки AB і A_1B_1 паралельні, а їх кінці лежать у паралельних площинах α і β (мал. 100). Площина, яка проходить через прямі AB і A_1B_1, перетинає паралельні площини α і β по паралельних прямих: $AA_1 \parallel BB_1$. Крім того, за умовою теореми $AB \parallel A_1B_1$. Чотирикутник ABB_1A_1 – паралелограм, отже, $AB = A_1B_1$. Що і треба було довести.



Мал. 100

У паралельних площинах розміщують перекриття поверхів багатоповерхових будинків, шибки подвійних вікон, верхні грані сходинок. Паралельні шари фанери,



Мал. 101

Мал. 102

пилки, що розпилюють колоду на дошки (мал. 101), протилежні грані цеглини, швелера, двотаврової балки (мал. 102), губки слюсарних лещат та ін.

Для допитливих

Теореми 8 і 9 доведені для випадків, коли площини α і β різні. Якщо вони суміщаються ($\alpha = \beta$), часто їх також вважають паралельними. Для цього випадку теореми 8 і 9 очевидні.

Відношення паралельності площин має такі самі властивості, як і відношення паралельності прямих.

Кожна площина паралельна сама собі (рефлексивність).

Якщо $\alpha \| \beta$, то $\beta \| \alpha$ (симетричність);

Якщо $\alpha \| \beta$ і $\beta \| \gamma$, то $\alpha \| \gamma$ (транзитивність).

Спробуйте обґрунтувати таке твердження:

«Якщо пряма a і площини α і β такі, що $a \| \alpha$ і $\alpha \| \beta$, то $a \| \beta$».

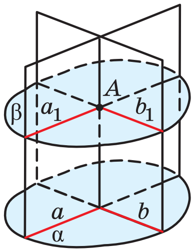
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які площини називають паралельними?
2. Сформулюйте ознаку паралельності площин.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про перетин паралельних площин січною площиною.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про перетин двох паралельних прямих паралельними площинами.

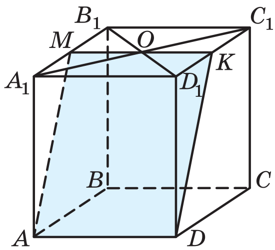
Виконаємо разом

1. Як через точку поза даною площиною провести площину, паралельну даній?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. У даній площині α проведемо які-небудь прямі a і b, що перетинаються (мал. 103). Через дану точку A проведемо паралельні їм прямі a_1 і b_1. Прямі a_1 і b_1



Мал. 103



Мал. 104

перетинаються, тому через них можна провести площину β. За теоремою 8 площина β паралельна площині α.

Спробуйте розв'язати задачу іншим способом, як показано на малюнку 107.

2. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через ребро нижньої основи і точку перетину діагоналей верхньої основи.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай переріз проходить через ребро AD і точку O перетину діагоналей A_1C_1 і B_1D_1. Оскільки основи паралелепіпеда паралельні, то січна площина перетинає їх по паралельних прямих. Тому через точку O проведемо відрізок MK, такий, що $MK \parallel AD$. Сполучимо точки A і M, K і D. Тоді $AMKD$ – шуканий переріз (мал. 104).

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

282. Відомо, що дві прямі, які лежать у площині α, паралельні площині β. Чи випливає з цього, що $\alpha \parallel \beta$?

283. Кожна діагональ ромба $ABCD$ паралельна площині α. Як розміщені площини α і (ABC)?

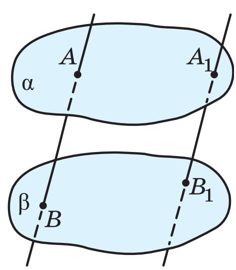
284. Чи буде площина трапеції паралельна площині α, якщо цій площині паралельні:

а) основи трапеції; б) бічні сторони трапеції?

285. Чи можуть мати однакові довжини відрізки непаралельних прямих, що містяться між паралельними площинами?

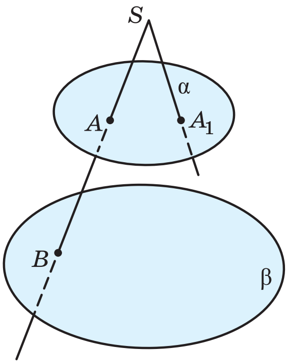
286. Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих. Чи випливає з цього, що площини α і β паралельні?

287. Чи паралельні прямі AB і A_1B_1, якщо паралельні площини α і β вони перетинають у точках A, B, A_1, B_1, як показано на малюнку 105?

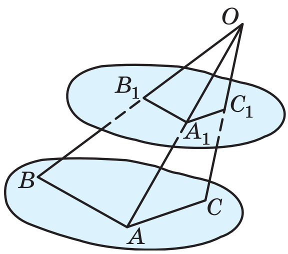


Мал. 105

А



Мал. 106



Мал. 107

288. Площини α і β паралельні. Промені SA і SA_1 перетинають площину α в точках A і A_1 (мал. 106). SA перетинає площину β у точці B. Побудуйте точку B_1 перетину SA_1 з площиною β.

289. Пряма a паралельна площині α. Як через пряму a провести площину, паралельну α?

290. Площини α і β паралельні. Доведіть, що кожна пряма площини α паралельна площині β.

291. Відрізки OA, OB і OC не лежать в одній площині. Доведіть, що площина, яка проходить через їхні середини, паралельна площині (ABC) (мал. 107).

292. Точка O – спільна середина кожного з відрізків AA_1, BB_1, CC_1, які не лежать в одній площині. Доведіть, що площини (ABC) і ($A_1B_1C_1$) паралельні.

293. Чи можуть перетинатися площини α і β, якщо кожна з них паралельна площині γ?

294. Доведіть, що коли пряма або площина перетинають одну з двох паралельних площин, то перетинають і другу.

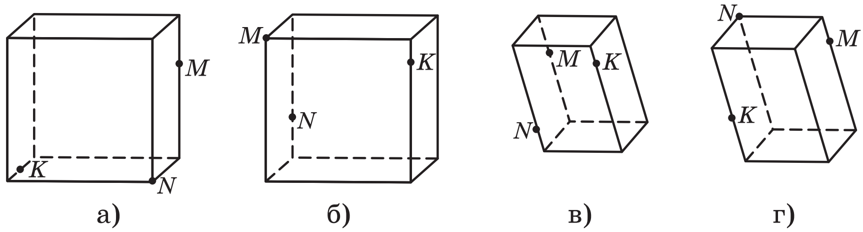
295. Площини α і β перетинаються. Доведіть, що будь-яка площина простору перетинає хоча б одну з цих площин.

296. Доведіть, що через дві будь-які мимобіжні прямі можна провести єдину пару паралельних площин.

297. Через точку C, яка лежить поза паралельними площинами α і β, проведено прямі a і b, що перетинають площину α в точках A і A_1, а площину β у точках B і B_1 відповідно. Знайдіть AA_1, якщо:

а) $AC = 2$ см, $AB = 6$ см, $BB_1 = 10$ см;
б) $A_1C : A_1B_1 = 2:3$, $BB_1 = 10$ см;
в) $AC = 2$ см, $BB_1 = 8$ см, $CB = AA_1$;
г) $AC = 2$ см, $BB_1 = 24$ см, $BA = AA_1$.

298. Точка C лежить між паралельними площинами α і β. Через точку C проведено прямі a і b, які перетинають площину α в точках A і A_1, а площину β у точках B і B_1 відповідно. Знайдіть AA_1, якщо:



Мал. 108

а) $AC = 2$ см, $BC = 5$ см, $B_1B = 15$ см;
б) $AC : BC = 2 : 3$, $BB_1 = 9$ см;
в) $AC = 1$ см, $B_1B = 6$ см, $AA_1 = AB$;
г) $AC = 3$ см, $B_1B = 12$ см, $AA_1 = CB$.

299. Паралельні відрізки AB і CD містяться між паралельними площинами α і β так, що точки A і C належать площині α, а B і D – площині β. Знайдіть AD і BC, якщо:
а) $DC = 25$ см, $AC = 7$ см, $\angle CAD = 90°$;
б) $AC = 5$ см, $CD = 8$ см, $\angle ACD = 120°$.

300. Дано тетраедр $ABCD$. $M \in DB$, $N \in DB$, $DM = MN = NB$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку M паралельно площині (ANC). Обчисліть периметр і площу перерізу, якщо $AN = CN = 25$ см, $AC = 14$ см.

301. Точка A_1 ділить ребро PA тетраедра $PABC$ у відношенні $PA_1 : A_1A = 2 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка паралельна площині (ABC) і проходить через точку A_1. Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо ABC – рівносторонній трикутник і $AB = 20$ см.

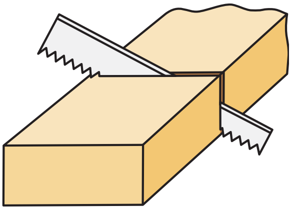
302. Точка X ділить ребро AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у відношенні $AX : XB = 2 : 3$. Побудуйте переріз цього куба площиною, яка паралельна площині (AA_1C_1) і проходить через точку X. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = a$.

303. Накресліть паралелепіпеди (мал. 108, *а–г*) в зошит і побудуйте їх перерізи, які проходять через точки M, N, K.

Б

304. Рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розміщено в площинах α і β так, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 паралельні. Чи випливає з цього, що площини α і β паралельні?

305. Доведіть, що коли перерізом паралелепіпеда є шестикутник, то його протилежні сторони паралельні.



Мал. 109

306. Кожна грань дошки – прямокутник (мал. 109). Доведіть, що в якому напрямі не розпилювали б дошку, перетинаючи всі її поздовжні ребра, у перерізі завжди буде паралелограм.

307. Чи може перерізом куба бути правильний п’ятикутник?

308. $ABCDEFA$ – неплоска замкнена ламана із шести ланок. Доведіть, що коли $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ і $CD \parallel FA$, то $AB = DE$, $BC = EF$ і $CD = FA$.

309. Відрізки AB і CD паралельних прямих розміщені між паралельними площинами α і β так, що точки A і C лежать у площині α, а B і D – у площині β. $CB = 7$ см, $AD = \sqrt{129}$ см. Знайдіть AB і BD, якщо DC на 3 см більший, ніж AC.

310. Дано тетраедр $ABCD$, $M \in AD$, $AM : MD = 1 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку M паралельно площині (BDC). Знайдіть площу і периметр перерізу, якщо $\triangle BDC$ – рівносторонній і його площа дорівнює 64 см^2.

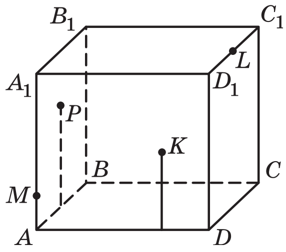
311. Дано тетраедр $ABCD$. $P \in BC$, $BP = CP$, $M \in AC$, $CM : AC = 1 : 3$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку M паралельно площині (ADP). Знайдіть сторони перерізу, якщо $AB = AC = 20$ см, $BC = 16$ см, $AD = DB = DC = 17$ см.

312. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $M \in AA_1$, $N \in DD_1$, $K \in CC_1$, $AM : MA_1 = DN : ND_1 = C_1K : KC = 2 : 1$. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точки M, N, K. Знайдіть його периметр, якщо $AB = a$.

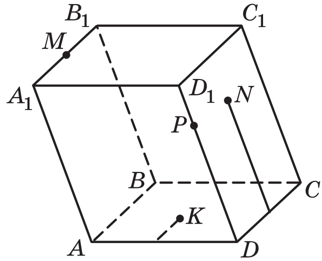
313. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M – середина A_1B_1. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точку M паралельно площині (BB_1D_1). Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$.

314. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = BC = a$, K – середина ребра A_1B_1 і $\angle KAC = \alpha$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точки A, C, K, і знайдіть його площу. Обчисліть, якщо $a = 3{,}78$ дм, $\alpha = 75°$.

315. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M – середина ребра CC_1. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через вершину C_1 паралельно площині (BMD). Знайдіть периметр і площу перерізу, якщо ребро куба a.



Мал. 110



Мал. 111

316. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB = a$. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через вершину D, паралельно площині (AB_1C). Знайдіть периметр і площу перерізу.

317*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед. Точка P лежить в грані AA_1B_1B, K – в грані AA_1D_1D, $L \in C_1D_1$, $M \in AA_1$ (мал. 110). Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точку M, паралельно площині (PKL).

318*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед. $M \in A_1B_1$, N лежить у площині грані DD_1C_1C, K – у площині грані $ABCD$ (мал. 111). Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точку $P \in DD_1$, паралельно площині (MNK).

319*. Дано три паралельні площини α, α_1, α_2 і прямі a, b, які перетинають їх відповідно в точках A, A_1, A_2 і B, B_1, B_2. Доведіть, що $AA_1 : A_1A_2 = BB_1 : B_1B_2$.

320*. Проведіть дві паралельні площини, які відтинають на трьох даних попарно мимобіжних прямих рівні відрізки.

321. ***ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ.*** Зробіть з картону або цупкого паперу модель до теореми 8.

Вправи для повторення

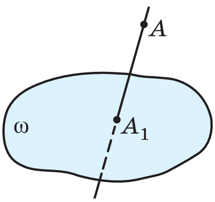
322. Середня лінія трапеції дорівнює 8 см і поділяється діагоналлю на два відрізки так, що різниця між ними дорівнює 2 см. Знайдіть основи трапеції.

323. Прямі a і b – мимобіжні. Точки A і B лежать на прямій a, а точки M і N – на прямій b. Яке взаємне розташування прямих AN і BM?

324. $ABCD$ – квадрат, точка K не лежить в його площині. Знайдіть периметр чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$, якщо A_1, B_1, C_1, D_1 – середини відрізків AK, BK, CK, DK і $AB = 8$ см.

§ 9 ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Для зображення просторових фігур у стереометрії, як і в кресленні, користуються паралельним проектуванням. Пригадаємо, що це таке.



Мал. 112

Нехай дано довільну площину ω і точку A (мал. 112). Проведемо через точку A пряму, яка перетинає площину ω у деякій точці A_1. Знайдену таким способом точку A_1 називають *проекцією точки* A на площину ω, пряму AA_1 – *проектуючою прямою*, ω – *площиною проекцій*.

Щоб побудувати проекцію будь-якої фігури, треба спроектувати на площину проекцій кожну точку даної фігури. Якщо проектуючі прямі проводять через одну точку, кажуть про *центральне проектування*. Якщо проектування здійснюється паралельними прямими, його називають *паралельним проектуванням*, а побудовані проекції – *паралельними проекціями*. У стереометрії фігури зображають зазвичай за допомогою паралельного проектування.

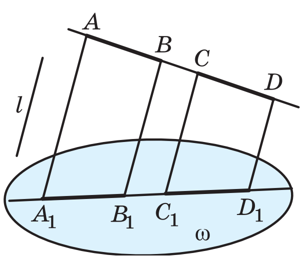
! **Теорема 11.** ***Якщо відрізки, які проектуються, не паралельні проектуючій прямій, то при паралельному проектуванні:***

1) *відрізки фігури зображаються відрізками;*

2) *паралельні відрізки – паралельними відрізками, або відрізками однієї прямої;*

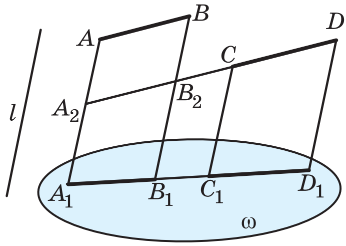
3) *відношення довжин паралельних відрізків або відрізків однієї прямої зберігається.*

ДОВЕДЕННЯ. 1) Усі прямі, паралельні проектуючій прямій l, які перетинають даний відрізок AB, заповнюють частину площини α, обмежену паралельними прямими AA_1 і BB_1 (див. задачу 220). Ця частина площини перетинає площину проекцій ω по відрізку A_1B_1 – проекції відрізка AB на площину ω (мал. 113).

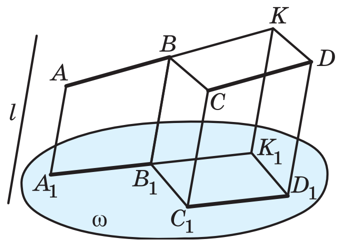


Мал. 113

2) Нехай відрізки AB і CD, що проектуються, паралельні. Усі прямі, що їх перетинають і паралельні l, заповнюють частини однієї площини (мал. 114) або паралельних площин



Мал. 114



Мал. 115

(мал. 115). Ці частини площин перетинають площину ω відповідно по відрізках однієї прямої або по паралельних відрізках A_1B_1 і C_1D_1 – проекціях даних відрізків на площину ω.

3) Якщо відрізки AB і CD, які проектують, розміщені на одній прямій (мал. 113), то за теоремою Фалеса:

$$A_1B_1 : C_1D_1 = AB : CD.$$

Якщо відрізки AB і CD паралельні, а їх проекції A_1B_1 і C_1D_1 лежать на одній прямій (мал. 114), то ABB_2A_2 – паралелограм. У цьому випадку

$$A_1B_1 : C_1D_1 = A_2B_2 : CD = AB : CD.$$

Нарешті, якщо проекції A_1B_1 і C_1D_1 даних паралельних відрізків AB і CD не лежать на одній прямій (мал. 115), то побудуємо паралелограм $CDKB$. Його проекція – паралелограм $C_1D_1K_1B_1$. Маємо:

$$A_1B_1 : C_1D_1 = A_1B_1 : B_1K_1 = AB : BK = AB : CD.$$

Отже, завжди

$$A_1B_1 : C_1D_1 = AB : CD,$$

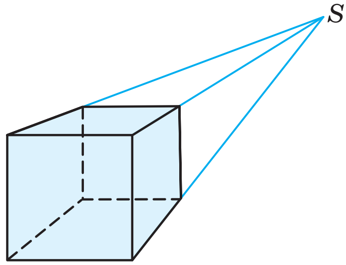
тобто **довжини проекцій паралельних відрізків або відрізків однієї прямої відносяться, як довжини відрізків, які проектують.**

Розглянуті властивості паралельного проектування дають змогу наочно і з більшою визначеністю зображати неплоскі фігури на площині.

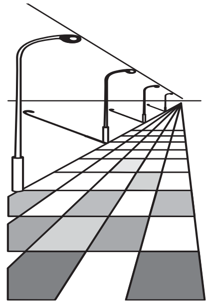
Оскільки інших проекцій, крім паралельних, далі не розглядатимемо, умовимося їх називати просто проекціями без слова «паралельні».

Для допитливих

Крім паралельного проектування, чимало фахівців користуються і центральним проектуванням, коли проектуючі прямі проходять через одну точку (мал. 116). Таким проектуванням, зокрема, користуються



Мал. 116



Мал. 117

художники, називаючи його перспективою (мал. 117). Властивості центрального проектування відрізняються від паралельного проектування. Леонардо да Вінчі писав: «Живописець і є той, хто за потребою свого мистецтва створив... перспективу». І А. Дюрер зізнавався: «Виявити закони перспективи я бажав більше, ніж отримати королівство».

Властивості центрального проектування ми не розглядатимемо. Говорячи далі про проекції, матимемо на увазі тільки паралельні проекції.

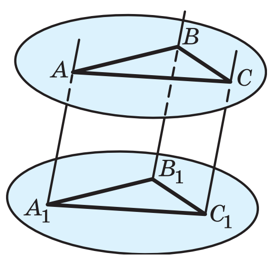
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Поясніть кількома реченнями, що таке проектування.
2. Які види проектування вам відомі?
3. Що таке паралельне проектування?
4. Сформулюйте і доведіть найважливіші властивості паралельного проектування.

Виконаємо разом

1. Доведіть, що коли $\triangle A_1B_1C_1$ – проекція $\triangle ABC$ і площини цих трикутників паралельні, то $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Оскільки площини трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ паралельні (мал. 118), то паралельні відрізки AA_1, BB_1, CC_1, що містяться між ними, рівні. Отже, чотирикутники ABB_1A_1, ACC_1A_1 і BCC_1B_1 – паралелограми, $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$. За трьома сторонами трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні.



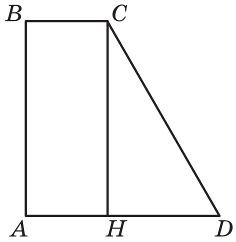
Мал. 118

2. Чи правильно, що плоска фігура дорівнює своїй проекції тільки за умови, якщо вона розміщена в площині, паралельній площині проекцій?

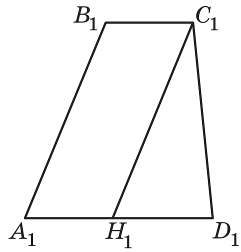
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Ні. Наприклад, якщо $ABCD$ – правильний тетраедр, а проектуюча пряма AB, то грань BCD – проекція грані ACD. Ці грані рівні, хоча й не лежать у паралельних площинах.

3. Нехай трапеція $A_1B_1C_1D_1$ (мал. 119, *б*) є паралельною проекцією прямокутної трапеції $ABCD$ (мал. 119, *а*). Побудуйте проекцію висоти CH цієї трапеції.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай у трапеції $ABCD$ кути A і B прямі. Тоді висота CH буде паралельною стороні AB. Оскільки при паралельному проектуванні паралельні прямі переходять у паралельні прямі, то потрібно через точку C_1, провести пряму C_1H_1, паралельну A_1B_1.



а)



б)

Мал. 119

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

325. Проекція фігури – точка. Назвіть цю фігуру.

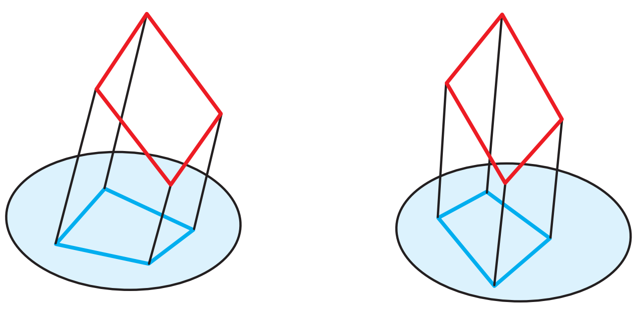
326. Відрізок a – проекція відрізка b. Чи завжди a коротший, ніж b?

327. $ABCD$ – паралельна проекція паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ на площину α (мал. 120). Укажіть помилки на малюнках.

328. Чи може бути:

а) ромб проекцією квадрата;

б) ромб проекцією трапеції;



Мал. 120

в) рівнобічна трапеція проекцією нерівнобічної;
г) нерівнобічна трапеція проекцією рівнобічної;
ґ) відрізок проекцією неплоскої фігури?

329. Учень говорить: «Якщо фігура A така, що її проекції на дві різні площини – відрізки, то A – відрізок». Чи правильно це?

А

330. Кожна сторона трикутника паралельна його проекції. Зобразіть малюнок. Доведіть, що ці трикутники рівні.

331. Чи можуть непаралельні прямі проектуватися в паралельні прямі? Відповідь обґрунтуйте. Виконайте малюнки.

332. Якою фігурою може бути паралельна проекція на площину двох прямих, які: а) перетинаються; б) паралельні; в) мимобіжні? Розгляньте різні випадки. Виконайте малюнки.

333. Якою фігурою може бути проекція прямого кута?

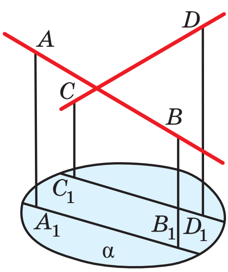
334. Як потрібно розмістити у просторі три точки, щоб їх паралельними проекціями були: а) одна точка; б) дві точки; в) три точки, які лежать на одній прямій; г) три точки, які не лежать на одній прямій? Виконайте малюнки.

335. Доведіть, що паралельною проекцією многокутника, площина якого паралельна площині проекцій, є многокутник, рівний даному.

336. Чи перетинаються прямі AB і CD, зображені на малюнку 121, якщо A_1B_1 і C_1D_1 – їхні проекції на площину α?

337. Трикутник $A_1B_1C_1$ – проекція трикутника ABC. Побудуйте проекції середніх ліній і медіан трикутника ABC.

338. Намалюйте довільний паралелограм. Нехай він – проекція ромба з кутом 120°. Побудуйте проекцію висоти ромба, проведеної з вершини цього кута.



Мал. 121

339. Нехай паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ – проекція квадрата $ABCD$. Побудуйте проекції осей симетрії цього квадрата.

340. Накресліть довільний паралелограм $A_1B_1C_1D_1$. Нехай він – проекція деякого прямокутника $ABCD$. Побудуйте проекції прямих, які проходять через точку перетину діагоналей, паралельно його сторонам.

341. BH, BM, BL – висота, медіана і бісектриса трикутника ABC. $\triangle A_1B_1C_1$ – паралельна проекція $\triangle ABC$. Чи буде паралельною проекцією відрізків BH, BM, BL висота, медіана і бісектриса $\triangle A_1B_1C_1$? Відповідь обґрунтуйте.

342. Накресліть довільний трикутник $A_1B_1C_1$. Нехай він є паралельною проекцією рівностороннього $\triangle ABC$. Побудуйте проекції прямих, які проходять через точку M ($M \in AB$) перпендикулярно до сторін трикутника.

343. Паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ є паралельною проекцією ромба $ABCD$. Побудуйте проекції перпендикулярів, проведених з точки M ($M \in BC$) до діагоналей ромба.

344. P – внутрішня точка квадрата $ABCD$. Нехай паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ і його внутрішня точка M_1 – паралельна проекція цього квадрата і точки M. Побудуйте проекції прямих, які проходять через точку M перпендикулярно до: а) сторін квадрата; б) діагоналей квадрата.

Б

345. Якою фігурою може бути паралельна проекція на площину: а) куба; б) тетраедра; в) чотирикутної піраміди? Виконайте відповідні малюнки.

346. Намалюйте довільну трапецію $A_1B_1C_1D_1$. Нехай вона – проекція деякої рівнобічної трапеції $ABCD$. Побудуйте проекцію висоти цієї трапеції, проведеної з вершини B.

347. Нехай паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ є паралельною проекцією ромба $ABCD$, у якого $\angle A = 60°$. Побудуйте проекції висот ромба, проведених з точки A.

348. Накресліть довільний $\triangle A_1B_1C_1$. Нехай він – паралельна проекція $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) з катетами 6 см і 8 см. Побудуйте проекції центрів кіл, вписаного в трикутник і описаного навколо нього.

349. Паралельною проекцією точок M, N, K, що лежать на одній прямій на площину α, є точки M_1, N_1, K_1. Знайдіть M_1N_1 і M_1K_1, якщо $MN = 6$ см, $MK = 4$ см, $N_1K_1 = 5$ см.

350. Чи правильно, що коли F_1 – проекція плоскої фігури F, то і F – проекція фігури F_1?

351. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 6 см. Знайдіть площу проекції трикутника AB_1C: а) на площину грані $ABCD$ в результаті проектування в напрямі B_1B; б) на площину грані ABB_1A_1 в результаті проектування в напрямі C_1A_1; в) на площину грані CBB_1C_1 в результаті проектування в напрямі AC_1.

352. $PABC$ – тетраедр, площа грані ABC дорівнює Q. Знайдіть площу паралельної проекції його грані PBC на площину (ABC) у результаті проектування: а) у напрямі PA; б) у напрямі PM, де M – середина ребра AB.

353*. Паралельною проекцією правильного п'ятикутника є п'ятикутник $ABCDE$, у якого $AB = BC = 1$, $\angle ABC = 90°$. Знайдіть довжини решти сторін п'ятикутника $ABCDE$.

Вправи для повторення

354. Дано пряму a і точку M, $M \notin a$. Через точку M проведіть пряму b так, щоб прямі a і b були: а) паралельні; б) мимобіжні; в) перетиналися.

355. K, P, T – середини ребер AB, CD і A_1B_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз цього паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки: а) K, P, T; б) K, P, A_1; в) C, D, T.

356. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = BC = a$ і $\angle B_1AC = \alpha$. Знайдіть площу трикутника AB_1C.

§ 10 ЗОБРАЖЕННЯ ФІГУР У СТЕРЕОМЕТРІЇ

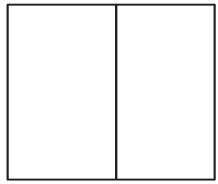
У стереометрії розглядаються не тільки плоскі, а й неплоскі фігури. Зображати неплоскі фігури на площині непросто: неминуче доводиться спотворювати деякі їхні елементи.

Особливо живописці намагалися з'ясувати, як найкраще просторові фігури зображати на плоскому полотні, щоб отримати зображення, схожі з реальними. Вони виявили, що для цього найбільш придатна *перспектива* – центральне проектування.

Для геометрів, креслярів та інших фахівців кращим виявилося паралельне проектування – коли паралельні відрізки фігури-оригіналу проектуються на паралельні відрізки.

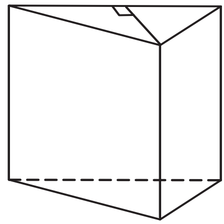
Якщо маємо яку-небудь фігуру F – оригінал і її паралельну проекцію F_1 на площині, то F_1 можна вважати зображенням фігури F. А як зображати на аркуші паперу надто великі об'єкти, наприклад куб зі стороною 10 м? Домовилися зображенням такого куба вважати його проекцію на площину, зменшену в кілька разів.

У геометрії *зображенням фігури* називається будь-яка фігура, подібна до паралельної проекції даної фігури. При цьому маються на увазі проекції, які дають змогу однозначно визначити форму зображуваної фігури. Оскільки, наприклад, кожний многокутник можна спроектувати на площину так, що його проекцією буде відрізок. Паралельною проекцією куба може бути, крім інших, прямокутник з відрізком (мал. 122). А такі зображення не наочні і незрозумілі: існує безліч різних геометричних тіл, відмінних від куба, що мають такі самі проекції (мал. 123, 124).



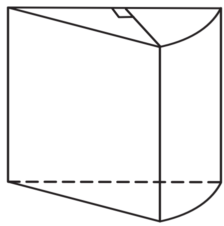
Мал. 122

Якщо проектуюча пряма паралельна площині плоскої фігури, то проекцією такої фігури є точка, відрізок, промінь чи пряма. Зокрема, проекцією трикутника, довільного многокутника, кола і круга може бути відрізок. Такі проекції називають *виродженими*. Здебільшого у стереометрії розглядають невироджені проекції.



Мал. 123

Щоб зображення многогранника було зрозумілішим, з усіх можливих його проекцій вибирають такі, на яких є зображення усіх його ребер. При цьому «невидимі» ребра (розташовані за іншими частинами многогранника) зображають *штриховими відрізками*. Креслярі користуються й іншими видами ліній (мал. 125).

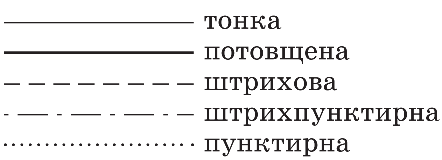


Мал. 124

У стереометрії найчастіше доводиться мати справу із зображеннями неплоских фігур: призм, пірамід і т. п. А щоб правильно виконувати їх, бажано знати, якими можуть бути зображення трикутника, паралелограма, кола тощо.

Зображенням паралелограма може бути будь-який інший паралелограм, оскільки при паралельному проектуванні паралельні відрізки відображаються на паралельні відрізки. Зокрема, ромб, прямокутник, квадрат можна зображати будь-яким паралелограмом. І навпаки, будь-який паралелограм можна вважати зображенням квадрата, ромба, прямокутника чи іншого паралелограма.

Зображенням трапеції може бути будь-яка інша трапеція з таким самим відношенням довжин основ, оскільки при паралельному проектуванні відношення довжин паралельних відрізків зберігається.

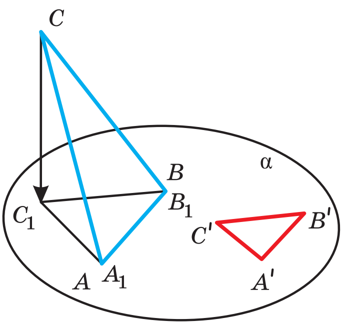


Мал. 125

Зображаючи плоскі фігури при паралельному проектуванні, корисно враховувати дві такі теореми.

Теорема 12. ***Довільний трикутник $A'B'C'$ може бути зображенням даного трикутника ABC.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай в площині α дано $\triangle A'B'C'$, а в просторі $\triangle ABC$. Доведемо, що $\triangle ABC$ можна так розмістити у просторі відносно площини α і задати такий напрям проектування, що проекцією $\triangle ABC$ буде трикутник, подібний до $\triangle A'B'C'$.



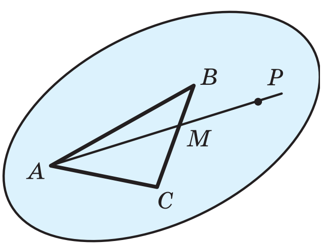
Мал. 126

Побудуємо у площині α $\triangle A_1B_1C_1$, подібний до $\triangle A'B'C'$ так, щоб $A_1B_1 = AB$ (мал. 126). $\triangle ABC$ розмістимо у просторі так, щоб сторони A_1B_1 і AB сумістилися, а площина $\triangle ABC$ не збігалася з площиною α. Тоді при паралельному проектуванні в напрямі CC_1 проекцією $\triangle ABC$ буде $\triangle A_1B_1C_1$, подібний до $\triangle A'B'C'$. А це означає, що $\triangle A'B'C'$ – зображення $\triangle ABC$.

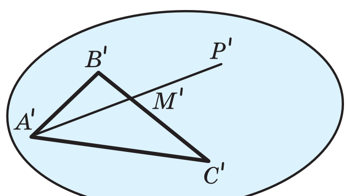
Із цієї теореми випливає, що зображенням даного трикутника (у тому числі й рівнобедреного, рівностороннього, прямокутного) може бути довільний трикутник.

Теорема 13. ***Якщо на площині зображень*** α ***зображенню $\triangle ABC$ відповідає $\triangle A'B'C'$, то на площині можна однозначно побудувати зображення довільної точки, яка лежить у площині $\triangle ABC$.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай P – довільна точка, що лежить у площині $\triangle ABC$ (мал. 127), і промінь AP перетинає сторону BC у точці M. Побудуємо зображення точки P у площині α. Нехай $\triangle A'B'C'$ – зображення $\triangle ABC$ (мал. 128). Скориставшись

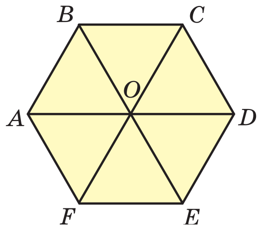


Мал. 127

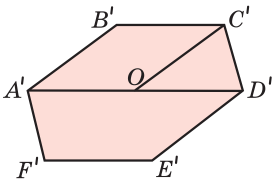


Мал. 128

умовою $B'M' : M'C' = BM : MC$, на прямій $B'C'$ побудуємо єдину точку M'. А за умовою $A'M' : M'P' = AM : MP$ можемо побудувати точку P' – зображення точки P.



Мал. 129



Мал. 130

На основі цих теорем зображення плоскої фігури F можна виконувати в такий спосіб:

1. Виділити в F який-небудь трикутник.
2. Зобразити цей трикутник довільним трикутником.
3. Побудувати зображення інших точок фігури F, користуючись тільки тими її властивостями, які зберігаються при паралельному проектуванні.

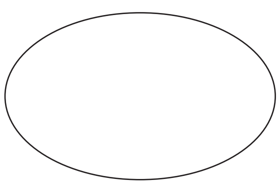
Для виконання деяких зображень доцільно в заданій фігурі виділяти не трикутник, а інший многокутник. Наприклад, щоб побудувати зображення правильного шестикутника $ABCDEF$ (мал. 129), потрібно врахувати, що $ABCO$ – ромб, точка O – центр симетрії шестикутника. Отже, щоб зобразити цей шестикутник, потрібно (мал. 130):

1. Побудувати довільний паралелограм $A'B'C'O'$ – зображення ромба $ABCO$.
2. Побудувати точки D', E', F', симетричні точкам A', B', C' відносно точки O'.

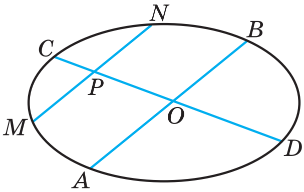
Правильний шестикутник можна зображати довільним шестикутником, кожна сторона якого паралельна протилежній стороні й одній з діагоналей, що проходить через центр шестикутника.

Коло в стереометрії зображають довільним еліпсом (мал. 131), адже при паралельному проектуванні коло відображається на еліпс. Тому зображення циліндра, конуса та інших фігур обертання містять різні еліпси. Детальніше з ними ви ознайомитеся в 11-му класі.

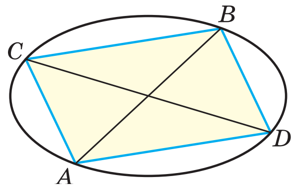
При зображенні многокутників, вписаних у коло або описаних навколо нього, користуються поняттям спряжених діаметрів. Два діаметри еліпса називаються *спряженими*, якщо кожний з них ділить хорди, паралельні іншому, навпіл. На оригіналі спряженим діаметрам еліпса відповідають



Мал. 131



Мал. 132



Мал. 133

перпендикулярні діаметри кола. Щоб побудувати спряжені діаметри еліпса (мал. 132), потрібно:

1. Побудувати довільний діаметр AB.
2. Провести довільну хорду $MN \| AB$.
3. Знайти точку P – середину хорди MN.
4. Через точки O і P провести діаметр CD.

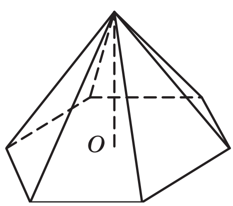
Якщо сполучити послідовно точки A, C, B, D, то отримаємо зображення квадрата, вписаного в коло (мал. 133). Чому?

Креслити просторові фігури потрібно так, щоб зображення було правильним (було фігурою, подібною до паралельної проекції оригіналу) і наочним (давало правильне уявлення про форму оригіналу), швидко і легко виконувалося.

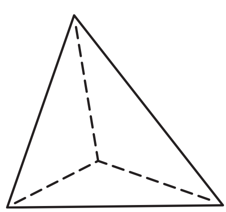
Щоб зобразити піраміду (мал. 134), потрібно:

1. Побудувати зображення многокутника, який лежить в її основі.
2. За умовою задачі знайти положення точки O – основи висоти SO. (Пригадайте, що таке висота піраміди.)
3. З точки O вертикально вгору провести промінь, на якому вибрати точку S – вершину піраміди.
4. Сполучити точку S з вершинами основи.
5. Виділити видимі і невидимі ребра піраміди.

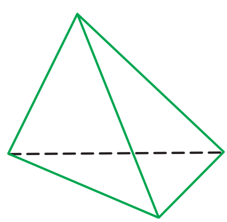
Зображенням довільного тетраедра при паралельному проектуванні може бути будь-який чотирикутник з проведеними в ньому діагоналями. Для наочності невидимі ребра тетраедра зображають штриховими лініями (мал. 135). Зображення тетраедра на малюнку 136 правильне, але не наочне.



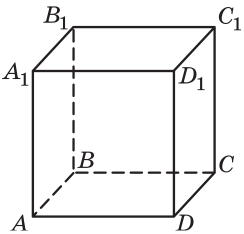
Мал. 134



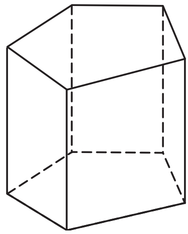
Мал. 135



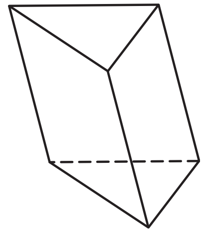
Мал. 136



Мал. 137



Мал. 138



Мал. 139

Паралелепіпед краще будувати, починаючи з основи (мал. 137):

1. Побудувати довільний паралелограм $ABCD$.
2. По один бік від площини цього паралелограма провести паралельні відрізки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, що мають рівні довжини.
3. Побудувати паралелограм $A_1B_1C_1D_1$.
4. Виділити видимі й невидимі ребра.

Побудову призми виконують аналогічно, починаючи з основи. Для наочності бічні ребра прямої призми зображають вертикальними відрізками (мал. 138), а похилої призми – похилими (мал. 139).

Різні способи зображення просторових фігур на площині розглядаються в кресленні і в нарисній геометрії.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають зображенням фігури у стереометрії?

2. Який вид проектування використовують при зображенні фігур у стереометрії?

3. Сформулюйте і доведіть теорему про зображення трикутника.

4. Якими фігурами можна зображати паралелограм, прямокутник, квадрат, ромб?

5. Якими фігурами можна зображати трапецію?

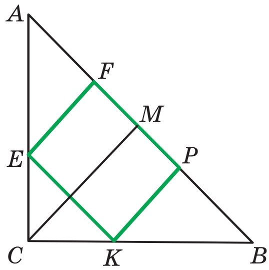
6. Якою фігурою у стереометрії зображають коло?

7. Як побудувати спряжені діаметри еліпса?

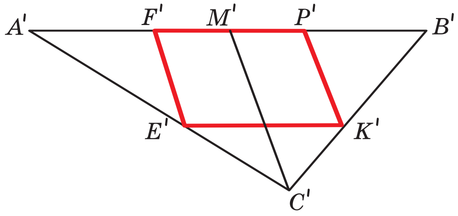
8. Як побудувати прямокутний паралелепіпед, похилий паралелепіпед, трикутну призму, чотирикутну піраміду?

Виконаємо разом

1. Побудуйте зображення квадрата, вписаного в рівнобедрений прямокутний трикутник, якщо дві вершини квадрата лежать на гіпотенузі, а дві інші – на катетах.



Мал. 140



Мал. 141

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай квадрат $EFPK$ вписаний в $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, $AC = BC$ (мал. 140). Якщо трикутник рівнобедрений прямокутний, то $\angle A = 45°$, тоді $\angle AEF = 45°$. Значить, $\triangle AEF$ – рівнобедрений прямокутний і $AF = FE = FP$. Аналогічно доводиться, що $BP = PK = PF$. Тоді $AF = FP = PB$.

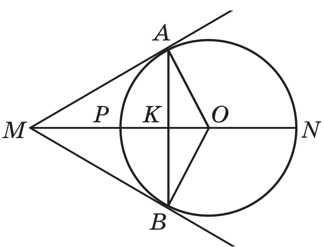
Проведемо $CM \perp AB$, тоді M – середина AB. Оскільки $KP \perp AB$, $EF \perp AB$, то $KP \parallel EF \parallel CM$. Враховуючи все це, можемо виконати побудову зображення (мал. 141).

1. Побудуємо довільний $\triangle A'B'C'$, який є зображенням $\triangle ABC$.
2. Точками F' і P' поділимо відрізок $A'B'$ на три рівні частини.
3. Проведемо відрізок $C'M'$, де M' – середина $A'B'$.
4. Проведемо $E'F' \parallel C'M'$ і $P'K' \parallel C'M'$. Чотирикутник $E'F'P'K'$ – зображення шуканого квадрата.

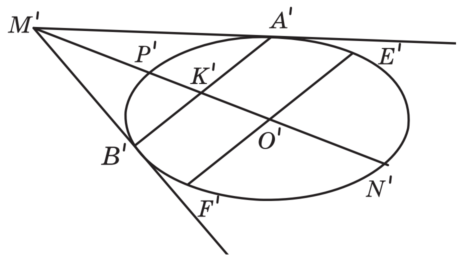
2. PN – діаметр кола. На промені NP знайдіть точку M таку, що дотичні, проведені з неї до кола, утворюють кут $60°$ (мал. 142). Побудуйте зображення точки M та дотичних.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай MA і MB – дотичні, $\angle AMB = 60°$. Тоді $\angle AMO = \angle OAK = 30°$, тому $MO = 2OA = 2OP$ і $OK = 0{,}5OA = 0{,}5OP$. Враховуючи, що $AB \perp MO$, можемо будувати зображення.

Нехай еліпс із центром O' є зображенням даного кола, а діаметр $P'N'$ – зображенням діаметра PN (мал. 143).



Мал. 142



Мал. 143

1. Проведемо промінь $N'P'$ і позначимо на ньому точку M' таку, що $O'M' = 2O'P'$.

2. Позначимо точку K' – середину $P'O'$.

3. Побудуємо діаметр $E'F'$, спряжений до $P'N'$.

4. Через точку K' проведемо $A'B' \parallel E'F'$.

5. Проведемо промені $M'A'$ і $M'B'$, які і будуть зображенням шуканих дотичних.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

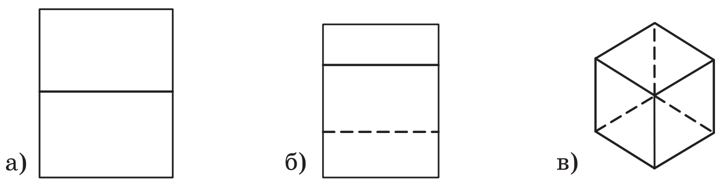
357. Чи може рівносторонній трикутник бути зображенням прямокутного трикутника? А тупокутного?

358. Чи може зображенням квадрата бути ромб? А зображенням трапеції паралелограм?

359. Зображенням якого трикутника є трикутник ABC, якщо точка B лежить на еліпсі, а AC – діаметр цього еліпса?

360. AB і CD два довільні діаметри еліпса. Зображенням якого чотирикутника є чотирикутник $ACBD$? А якщо діаметри спряжені?

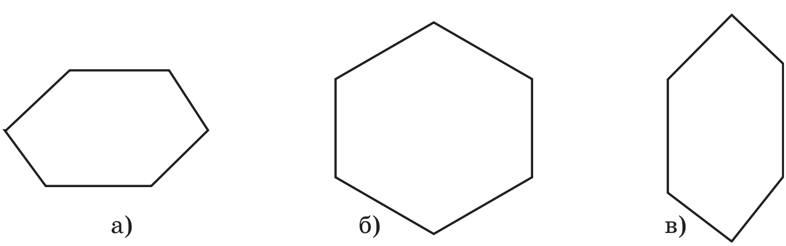
361. Яка з наведених на малюнку 144 фігур є зображенням (паралельною проекцією) куба?



а) б) в)

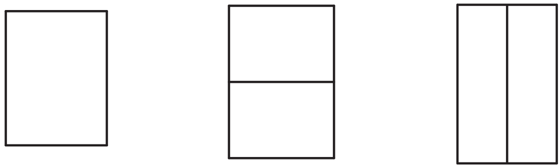
Мал. 144

362. Який із шестикутників, що на малюнку 145, є зображенням правильного шестикутника? Чому?



а) б) в)

Мал. 145



Мал. 146

363. Чи можна малюнок 146 вважати зображенням прямокутного паралелепіпеда? Чи наочне таке його зображення?

А

364. Точки A_1, A_2, A_3, які не лежать на одній прямій, є паралельними проекціями двох вершин і точки перетину діагоналей паралелограма. Побудуйте зображення паралелограма. Скільки розв'язків має задача?

365. Точки A_1, A_2, A_3, які не лежать на одній прямій, є паралельними проекціями однієї вершини і середин двох сторін трикутника. Побудуйте зображення трикутника. Скільки розв'язків має задача?

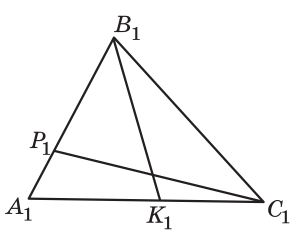
366. Побудуйте зображення прямих, які проходять через точку M – внутрішню точку рівностороннього $\triangle ABC$, перпендикулярно до сторін цього трикутника.

367. Трикутник $A'B'C'$ – паралельна проекція рівностороннього $\triangle ABC$. Побудуйте зображення центра кола, вписаного в трикутник.

368. Трикутник $A'B'C'$ – паралельна проекція рівнобедреного прямокутного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Побудуйте зображення серединних перпендикулярів, проведених до сторін трикутника.

369. Дано зображення трикутника і двох його висот (мал. 147). Побудуйте зображення центра описаного кола.

370. Трикутник $A'B'C'$ – паралельна проекція прямокутного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Побудуйте зображення центра вписаного в трикутник кола, якщо $BC : AB = 4 : 5$.



Мал. 147

371. У трикутнику ABC $AB : AC = 2 : 3$. Побудуйте зображення бісектриси, проведеної з вершини A.

372. Основи рівнобедреної трапеції пропорційні числам 1 і 2. Побудуйте зображення цієї трапеції, її середньої лінії та висот.

373. Накресліть еліпс і проведіть довільний діаметр AB. Побудуйте діаметр, спряжений до AB.

374. Побудуйте зображення: а) квадрата, вписаного в коло; б) квадрата, описаного навколо кола.

375. Побудуйте зображення правильного трикутника: а) вписаного в коло; б) описаного навколо кола.

376. Побудуйте зображення прямокутного трикутника, вписаного в коло.

377. Побудуйте зображення прямокутника, вписаного в коло.

378. На колі дано точку M. Побудуйте зображення дотичної, проведеної до кола в цій точці.

379. Побудуйте зображення квадрата, вписаного в прямокутний трикутник, якщо вони мають спільний прямий кут і: а) трикутник рівнобедрений; б) катети, пропорційні числам 3 і 5; в) гіпотенуза і катет відносяться як $13:5$.

Б

380. Побудуйте зображення паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо дано зображення точок: а) A, B, C, D_1; б) A, B, D, A_1; в) B, B_1, C_1, D.

381. Гострий кут ромба дорівнює $60°$. Побудуйте зображення висот цього ромба, проведених з вершини: а) тупого кута; б) гострого кута.

382. Бічна сторона і основа рівнобедреного трикутника відносяться як $3:2$. Побудуйте зображення центра кола, вписаного в трикутник.

383. У рівнобедреному трикутнику ABC висота AH ділить сторону BC у відношенні $BH:HC = 3:1$. Побудуйте зображення центра кола, описаного навколо трикутника.

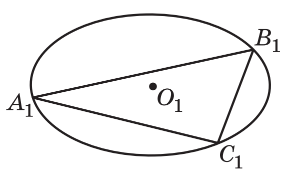
384. Еліпс, центр якого невідомий, є зображенням кола. Побудуйте зображення центра кола.

385. Дано зображення кола, його центра та трикутника, вписаного в це коло (мал. 148). Побудуйте зображення висот цього трикутника.

386. Побудуйте зображення правильного шестикутника: а) вписаного в коло; б) описаного навколо кола.

387. На площині дано зображення кола, його центра O, пряма l і точка M, яка не належить ні прямій, ні колу. Побудуйте зображення перпендикуляра, проведеного з точки M до прямої l.

388. Побудуйте зображення правильного п'ятикутника.



Мал. 148

389. Сторони прямокутника відносяться як $\sqrt{3}:1$. Побудуйте зображення перпендикуляра, проведеного з вершини прямокутника до його діагоналі.

390. Діагоналі ромба відносяться як $1:2$. Побудуйте зображення висоти, проведеної з вершини тупого кута.

391. Побудуйте зображення правильного трикутника, вписаного в квадрат, якщо одна його вершина збігається з вершиною квадрата, а дві інші – лежать на сторонах квадрата.

392. Побудуйте зображення квадрата, вписаного в рівносторонній трикутник так, що дві його сусідні вершини лежать на одній стороні трикутника, а дві інші – по одній на двох інших сторонах трикутника.

393. Побудуйте зображення правильного трикутника, вписаного в квадрат так, що вони мають спільну сторону, а вершина трикутника лежить всередині цього квадрата.

394. Побудуйте зображення ромба $AMNK$, вписаного в $\triangle ABC$ так, що $\angle A$ в них спільний, якщо:

а) $AB = BC = AC$;
б) $AB = BC = 2AC$;
в) $AB : AC = 3 : 5$.

395. $ABCDEF$ – правильний шестикутник. Побудуйте зображення перпендикуляра, проведеного з вершини A на:

а) діагональ CF;
б) сторону CD;
в) сторону BC.

Вправи для повторення

396. Правильний шестикутник і площина α розміщені так, що:

а) $AB \parallel \alpha$ і $BE \parallel \alpha$;
б) $BC \parallel \alpha$ і $AE \parallel \alpha$;
в) $AB \parallel \alpha$ і $FC \parallel \alpha$.

Чи будуть паралельними площина шестикутника і площина α?

397. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через середину ребра: а) A_1D_1; б) CC_1 проведено площину паралельно площині (AB_1D_1). Знайдіть периметр і площу утвореного перерізу, якщо $AB = a$.

398. Площини α і β перетинаються по прямій c. У площині α проведено пряму a, $a \parallel c$. Укажіть кілька способів побудови прямої b, $b \subset \beta$, $b \parallel a$.

§ 11 МЕТОДИ ПОБУДОВИ ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ

Раніше ви вже будували перерізи многогранників площиною. Виконували їх, використовуючи аксіоми стереометрії та теореми про паралельність прямих і площин. Існують й інші методи побудови перерізів. Найефективнішими є такі три методи: 1) метод слідів; 2) метод внутрішнього проектування; 3) комбінований метод.

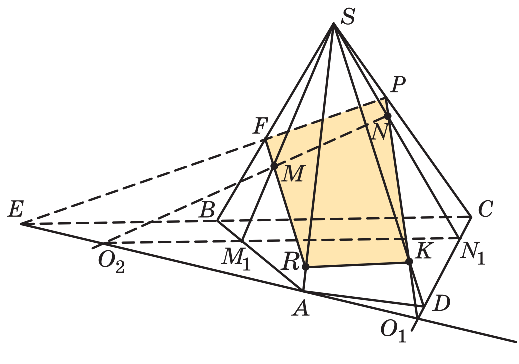
З методом слідів ви ознайомилися в § 5. Нагадаємо, що пряма, по якій січна площина перетинає площину α, називається *слідом* січної площини в площині α. Точка, в якій січна площина перетинає пряму, – слід січної площини на цій прямій.

Якщо многогранником, переріз якого будується, є призма, то найчастіше використовуємо паралельне проектування на площину основи. При цьому його напрям визначається бічним ребром призми. Якщо ж многогранником є піраміда, то використовується центральне проектування на площину основи. Центром проектування є вершина піраміди, в якій сходяться всі бічні ребра.

Розглянемо кілька прикладів.

ЗАДАЧА 1. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди $SABCD$ площиною, яка проходить через точки M, N, K (мал. 149).

Побудуємо слід січної площини у площині основи. Для цього спроектуємо точки M, N, K на площину основи з точки S. Отримаємо точки M_1, N_1, а проекція точки K збіжиться з точкою D. Знайдемо дві точки сліду, побудувавши точки O_1 ($NK \cap N_1D = O_1$) і O_2 ($MN \cap M_1N_1 = O_2$). Отже, пряма O_1O_2 – слід



Мал. 149

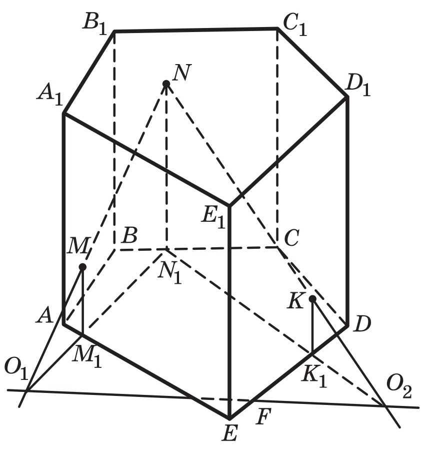
січної площини у площині основи. Тепер можемо побудувати шуканий переріз. Нехай $BC \cap O_1O_2 = E$, а $NK \cap SC = P$. Провівши пряму EP, отримаємо відрізок PF, по якому січна площина перетинає грань BSC. Далі, якщо $FM \cap AS = R$, проведемо відрізки FR і RK. Чотирикутник $RFPK$ – шуканий переріз.

ЗАДАЧА 2. Побудуйте переріз п'ятикутної призми площиною, яка проходить через точки M, N, K (мал. 150).

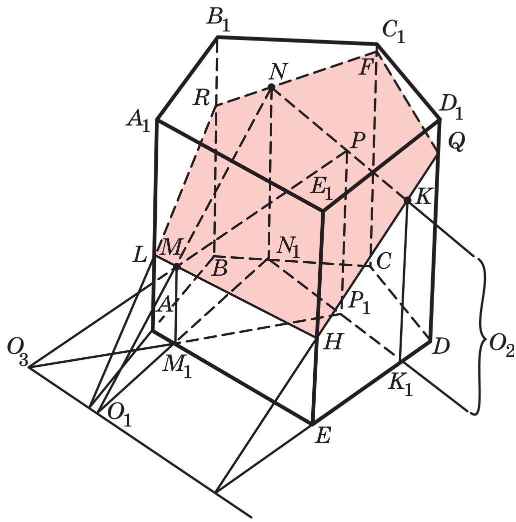
Спроектуємо точки M, N, K на площину основи паралельно бічному ребру призми. Отримаємо точки M_1, N_1, K_1. Побудуємо точки сліду як точки перетину прямих MN і M_1N_1 та прямих NK і N_1K_1. Побудувавши слід O_1O_2, зможемо побудувати і шуканий переріз. Пропонуємо зробити це самостійно.

Якщо точку K у грані DEE_1D_1 дано вище (мал. 151), то точку O_2 побудувати складно, бо прямі перетнуться далеко за межами малюнка. У цьому випадку краще користуватися іншим методом. Виберемо на прямій NK довільну точку P. Тоді $P \in (MNK)$, а значить, точки M, N, P визначають ту саму площину, що і точки M, N, K. Тепер побудуємо слід площини (MNP). Для цього спочатку на прямій N_1K_1 побудуємо точку P_1, яка є паралельною проекцією точки P (напрям проектування не змінюється – паралельний бічному ребру призми). Знайдемо точку O_3 – точку перетину прямих PM і P_1M_1. Отримали пряму O_1O_3 – слід січної площини. Зробивши відповідні побудови, отримаємо шуканий переріз – п'ятикутник $LRFQH$.

Метод внутрішнього проектування. Цей метод універсальний і має деякі переваги над методом слідів, особливо,



Мал. 150



Мал. 151

коли слід січної площини знаходиться далеко за межами малюнка (як це було у задачі 2).

ЗАДАЧА 3. Побудуйте переріз призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки K, P, T (мал. 152).

Нехай $KPTM$ – переріз, який треба побудувати. Одну з його діагоналей KT можна побудувати, оскільки дано точки K і T. Задача зводиться до побудови другої діагоналі. Проекції обох цих діагоналей побудувати неважко, оскільки вони є діагоналями основи призми. Встановимо відповідність: діагоналі перерізу KT відповідає проекція BD; діагоналі перерізу PM – проекція CA; перетину діагоналей перерізу O_1 – точка O.

З описаного аналізу випливає такий спосіб розв'язання задачі:

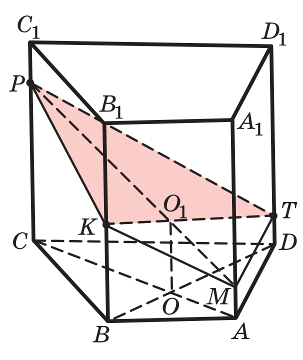
1) проводимо діагоналі основи призми AC, BD і позначаємо точку O їх перетину;

2) проводимо діагональ перерізу KT, яку можна провести;

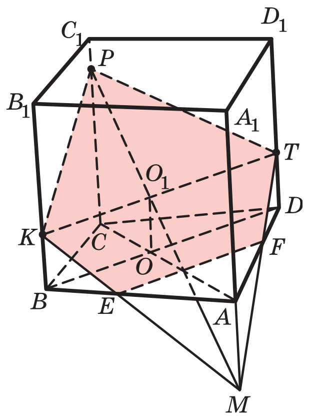
3) через точку O проводимо пряму, паралельну AA_1 до перетину з діагоналлю KT в точці O_1;

4) проводимо пряму PO_1 до перетину з AA_1 у точці M.

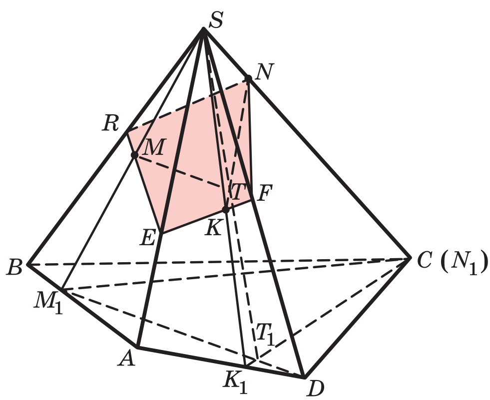
Залежно від того, як розміщені дані точки K, P і T, у перерізі може



Мал. 152



Мал. 153



Мал. 154

бути чотирикутник $KPTM$ (мал. 152) або п'ятикутник $KPTFE$ (мал. 153).

Будувати переріз піраміди методом внутрішнього проектування можна аналогічно, тільки користуватися слід центральним проектуванням.

ЗАДАЧА 4. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точки M, N, K.

Спроектуємо точки M, N, K з вершини S на площину $ABCD$. Отримаємо точки M_1, K_1, а точка N_1 збіжиться з точкою C (мал. 154).

Якщо $DM_1 \cap CK_1 = T_1$, а $ST_1 \cap NK = T$, $MT \cap SD = F$, то визначаємо точки E і R, в яких січна площина перетинає ребра SA і SB.

$FK \cap SA = E$, $EM \cap SB = R$.

Провівши відрізки RN і NF, матимемо шуканий переріз $ERNF$.

Для допитливих

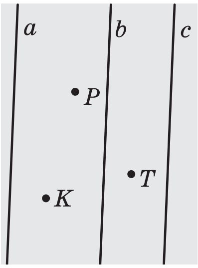
З побудовами перерізів многогранників тісно пов'язані деякі планіметричні задачі на побудову.

ЗАДАЧА 5. Дано три паралельні прямі однієї площини і три точки між ними. Побудуйте трикутник так, щоб його вершини лежали на даних прямих, а сторони проходили через дані точки (мал. 155).

Якщо користуватися тільки методами планіметрії, задачу розв'язати важко (спробуйте!). Методами стереометрії вона розв'язується порівняно просто.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Уявімо, що відрізки даних прямих – ребра трикутної призми, а точки K, P, T лежать на її бічних гранях.

Залишається побудувати переріз призми площиною, яка проходить через точки K, P, T (мал. 156). Проекція побудованого перерізу ABC – трикутник, який задовольняє умову задачі. Оскільки точки K і P можна уявляти то в одній грані призми, то в іншій, задача може мати два різні розв'язки. Переконайтеся самостійно.

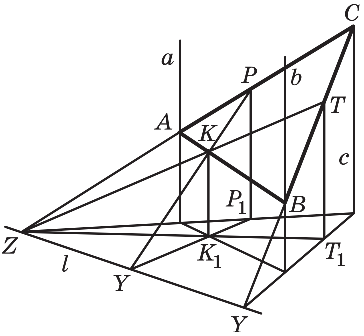


Мал. 155

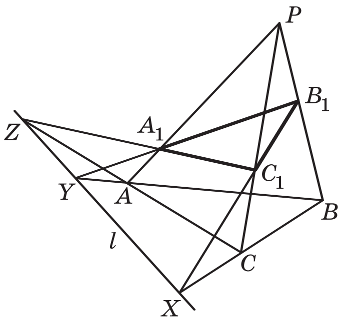
Як бачимо, розв'язувати деякі планіметричні задачі можна методами стереометрії, «вийшовши в простір». Іноді зручно моделлю планіметричної задачі вважати деяку стереометричну конфігурацію. Це стосується не тільки задач, а й багатьох важливих теорем. Одна з них – теорема Дезарга.

Якщо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розташовані так, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 проходять через одну точку, то прямі AB і A_1B_1, BC і B_1C_1, CA і C_1A_1 перетинаються в точках, що лежать на одній прямій, або паралельні.

Спробуйте довести теорему, користуючись малюнком 157. Покажіть на малюнку випадок, коли $XY \parallel AC \parallel A_1C_1$.



Мал. 156



Мал. 157

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

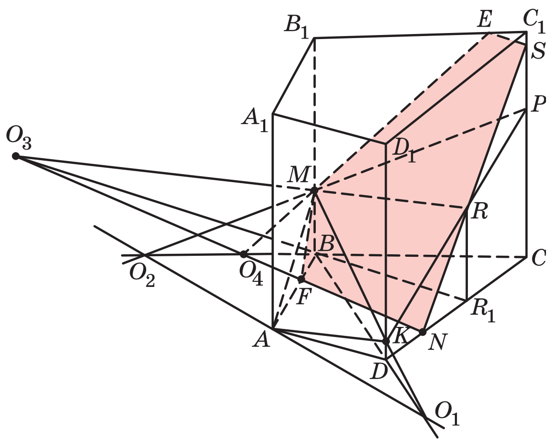
1. Яку пряму називають слідом січної площини?
2. Які методи побудови перерізів ви знаєте?
3. Як будувати перерізи многогранників методом слідів?
4. У чому полягає суть методу внутрішнього проектування побудови перерізів? Яку іншу назву має цей метод?
5. Які методи побудови перерізів поєднуються в комбінованому методі?

Виконаємо разом

Побудуйте переріз призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки M, N паралельно прямій AK (мал. 158).

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Побудуємо допоміжний переріз призми, який проходить через пряму AK і точку M. Для цього побудуємо слід допоміжної площини в площині основи. Одна точка сліду – точка A, оскільки вона лежить і в площині перерізу, і в площині основи. Другу точку сліду – точку O_1 – побудуємо як точку перетину прямої MK з прямою BD, яка є проекцією прямої MK на площину основи. Отже, AO_1 – слід січної площини. Тоді можемо побудувати точку O_2 – точку перетину BC і AO_1. Провівши пряму O_2M, отримаємо точку P ($P \in CC_1$), яку можемо сполучити з точкою K. Чотирикутник $AMPK$ – шуканий допоміжний переріз.

У площині $AMPK$ проведемо пряму $MR \| AK$. Оскільки пряма AK паралельна прямій MR, то вона паралельна площині, яка проходить через пряму MR. Це значить, що площина, яка проходить через пряму MR і точку N, – шукана січна площина. Для її побудови спочатку знайдемо точку R_1 – проекцію точки R на площину основи. Потім будуємо точку O_3 ($O_3 = MR \cap BR_1$). Тоді пряма O_3N – слід січної площини. Знайдемо точку перетину O_3N і ребра AB – точку F. Якщо O_4 – точка перетину прямих O_3N і BC, то проведемо пряму O_4M і отримаємо точку E. Проведемо пряму NR і отримаємо точку S, яку можемо сполучити з точкою E. Отримали шуканий переріз $FMESN$.



Мал. 158

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

399. Чи може п'ятикутник бути перерізом шестикутної призми? А семикутник?

400. Чи може правильний п'ятикутник бути перерізом паралелепіпеда?

401. Яку кількість сторін може мати многокутник, отриманий у перерізі чотирикутної піраміди площиною?

А

402. Побудуйте переріз чотирикутної похилої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через три точки, що лежать на ребрах BB_1, CC_1, AD.

403. Побудуйте переріз п'ятикутної призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ площиною, яка проходить через точки, що лежать на ребрах AA_1, CC_1, EE_1.

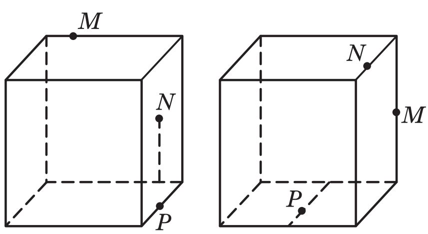
404. Побудуйте переріз п'ятикутної піраміди $SABCDE$ площиною, що проходить через точки M, N, P, якщо $M \in SA$, $N \in SC$, $P \in (DSE)$.

405. Побудуйте переріз паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною MNR, якщо $M \in CC_1$, $N \in DD_1$, $R \in A_1B_1$. Задачу розв'яжіть: а) методом слідів; б) методом внутрішнього проектування; в) комбінованим методом.

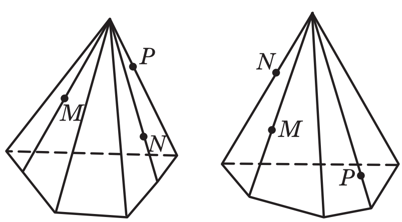
406. Побудуйте переріз похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки K, L, N, якщо $K \in (CC_1D_1)$, $L \in (AA_1D_1)$, $N \in BB_1$. Задачу розв'яжіть: а) методом слідів; б) методом внутрішнього проектування; в) комбінованим методом.

407. Точка R належить ребру SA піраміди $SABCD$, а точки P і T – бічним граням SBC та SCD. Побудуйте переріз піраміди площиною (PRT).

408. Побудуйте перерізи многогранника площиною, яка проходить через точки M, N, P (мал. 159, 160).



Мал. 159



Мал. 160

Б

409. Побудуйте переріз піраміди $SABCDE$ площиною, яка проходить через точки P і Q, які лежать у площинах (ASB) і (ABC), та внутрішню точку R ребра SE.

410. Побудуйте переріз призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки K, L, M, якщо вони лежать відповідно в гранях AA_1B_1B, AA_1D_1D, CC_1D_1D.

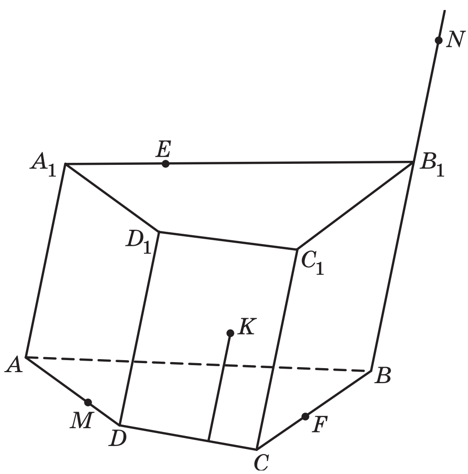
411. Побудуйте переріз призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки E, F, T, якщо $E \in AC_1$, $F \in B_1D$, $T \in C_1D_1$.

412. На ребрах AC, SB і SC піраміди $SABC$ задано точки M, N, K. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через пряму MN, паралельно прямій BK.

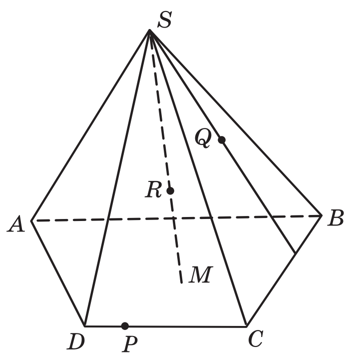
413*. На ребрах BB_1, EE_1 і на продовженні ребра CC_1 призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ задано точки M_1, N_1, P_1 відповідно, а на ребрах AA_1, BB_1 і CC_1 – точки M_2, N_2, P_2. Побудуйте: переріз призми площиною, що проходить через точки: а) M_1, N_1, P_1; б) M_2, N_2, P_2; в) лінію перетину площин ($M_1N_1P_1$) і ($M_2N_2P_2$).

414*. На ребрі AD, на продовженні ребра BB_1 і в площині грані CC_1D_1D призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано відповідно точки M, N, K. Побудуйте переріз призми площиною (MNK) і знайдіть точку перетину цієї площини з прямою EF, якщо $E \in A_1B_1$, $F \in BC$ (мал. 161).

415. Побудуйте переріз піраміди $SABCD$ площиною, яка проходить через точки P, Q, R, якщо $Q \in (SBC)$, $P \in CD$, $R \in SM$, де M – точка з площини $ABCD$ (мал. 162).



Мал. 161



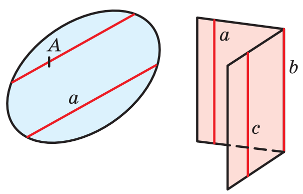
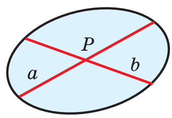
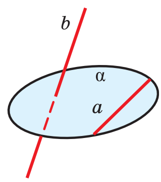
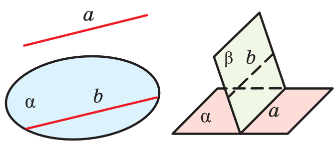
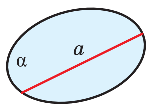
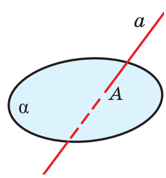
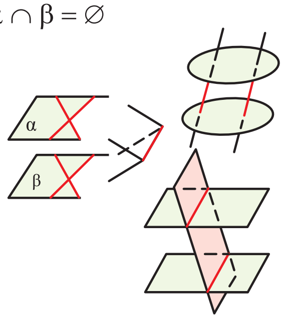
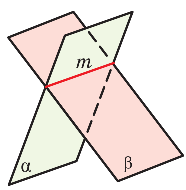
Мал. 162

Вправи для повторення

416. Кожні дві з трьох прямих перетинаються, але не лежать в одній площині. Як розташовані дані прямі? Виконайте малюнок.

417. Побудуйте зображення прямокутного рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, і точки перетину з колом прямих, які проходять через середину гіпотенузи, перпендикулярно до катетів.

418. Користуючись наведеною нижче таблицею, підготуйте розповідь про різні види розташування прямих і площин у просторі.

<table>
<tr><th>Відношення</th><th>паралельні</th><th>не паралельні</th></tr>
<tr><td>Пряма і пряма</td><td>$a \parallel b,\ b \parallel c$

$O,\ T_4,\ T_5$</td><td>Пересічні

Мимобіжні

T_3</td></tr>
<tr><td>Пряма і площина</td><td>$a \cap \alpha = \varnothing$

$O,\ T_6,\ T_7$</td><td>$a \subset \alpha$

O
$a \cap \alpha = A$
</td></tr>
<tr><td>Площина і площина</td><td>$\alpha \cap \beta = \varnothing$

$O,\ T_8,\ T_9,\ T_{10}$</td><td>$a \cap \beta = m$
</td></tr>
</table>

Тут O – означення, T – теорема.

ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

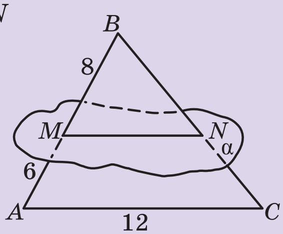
А | **Б**

1

А

$AC \parallel \alpha$

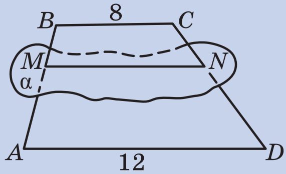
MN



Б

$BM : MA = 1 : 3$,
$BC \parallel \alpha$, $ABCD$ – трапеція

MN

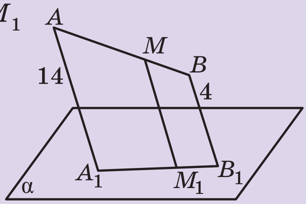


2

А

$AA_1 \parallel BB_1 \parallel MM_1$;
$AM : MB = 3 : 2$

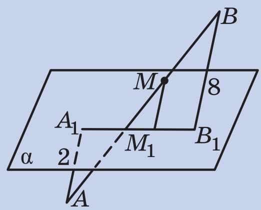
MM_1



Б

$AA_1 \parallel BB_1 \parallel MM_1$;
$AM : MB = 3 : 1$

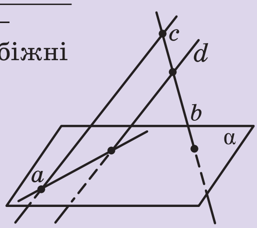
MM_1



3

А

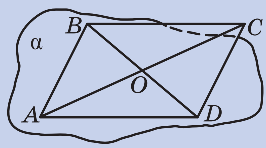
c і d – мимобіжні



Б

$A \in \alpha$; $B \in \alpha$; $O \in \alpha$

Довести: $CD \subset \alpha$

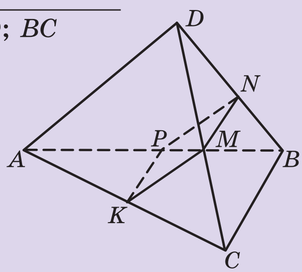


4

А

M, N, K, P – середини ребер;
$NP - MN = 3$
$P_{MNKP} = 26$

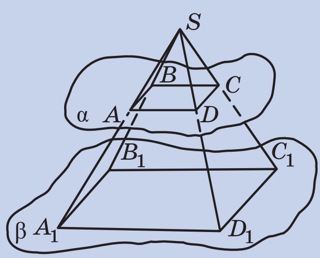
AD; BC



Б

$\alpha \parallel \beta$; $ABCD$ – паралелограм

$A_1B_1C_1D_1$ – паралелограм



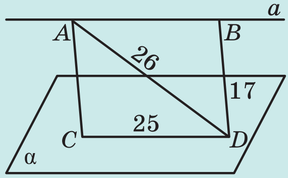
А	Б

5

А

$a \parallel \alpha$; $AC \parallel BD$

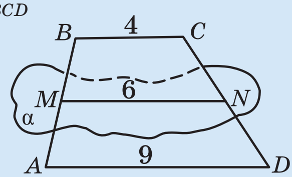
P_{ABDC}; S_{ABDC}



Б

$ABCD$ – трапеція; $AD \parallel \alpha$;
$S_{AMND} = 54$ см^2

S_{ABCD}

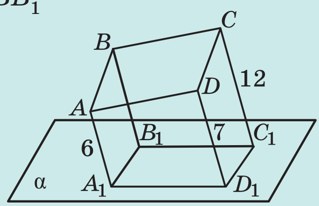


6

А

$ABCD$ – паралелограм;
$DD_1 = 7$ см;
$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$

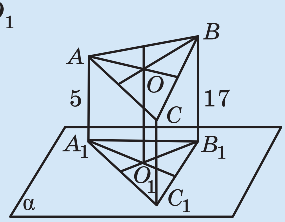
BB_1



Б

$AC \parallel \alpha$; O – точка перетину медіан;
$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel OO_1$

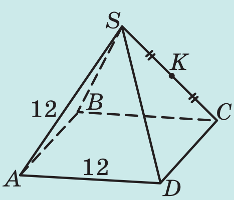
OO_1



Знайдіть площу перерізу правильної піраміди площиною, що проходить через AB і точку K.

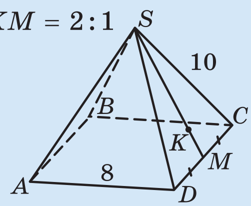
7

А



Б

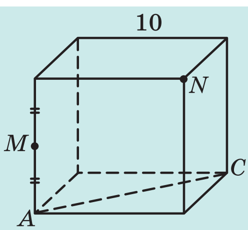
$SK : KM = 2 : 1$



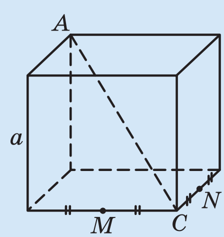
Знайдіть периметр перерізу куба площиною, яка паралельна AC і проходить через задані точки M і N.

8

А



Б



ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. AB і CD – основи трапеції $ABCD$. Пряма простору a паралельна AB. Яке взаємне розташування прямих a і CD?

а) Перетинаються; б) паралельні;
в) мимобіжні; г) не можна встановити.

2. Прямі a і b паралельні площині α. Яке взаємне розташування прямих a і b?

а) Перетинаються; б) паралельні;
в) мимобіжні; г) усі відповіді а)–в).

3. Площина проходить через пряму, паралельну іншій площині. Як розташовані ці площини?

а) Перетинаються; б) паралельні;
в) перетинаються або паралельні; г) збігаються.

4. Точка M не лежить у площині прямокутника $ABCD$. Яке взаємне розташування прямих MA і BD?

а) Перетинаються; б) паралельні;
в) мимобіжні; г) не можна встановити.

5. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Яке взаємне розташування прямих AC і BD?

а) Перетинаються; б) паралельні;
в) мимобіжні; г) не можна встановити.

6. Прямі a і b мимобіжні. Скільки існує різних площин, які проходять через a паралельно b?

а) Одна; б) жодної; в) безліч; г) жодної або безліч.

7. У трикутнику ABC $AC = 8$ см, $M \in AB$, $AM : MB = 1 : 3$. Через точку M паралельно AC проведено площину, яка перетинає BC у точці P. Знайдіть MP.

а) 24 см; б) 2,6 см; в) 6 см; г) 4 см.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $M \in AB$. Через точку M проведено площину, паралельну площині BB_1D_1D. У якому відношенні точка M ділить AB, якщо в перерізі утворився квадрат?

а) $1 : 2$; б) $1 : \sqrt{2}$;
в) $1 : (\sqrt{2} - 1)$; г) перерізом квадрат бути не може.

9. Ребро правильного тетраедра $ABCD$ дорівнює 24 см, $M \in BD$, $BM : MD = 3 : 1$. Знайдіть площу перерізу тетраедра площиною, яка проходить через точку M паралельно площині (ABC).

а) $16\sqrt{3}$ см^2; б) $9\sqrt{3}$ см^2; в) $81\sqrt{3}$ см^2; г) $36\sqrt{3}$ см^2.

10. Ребро правильного тетраедра $ABCD$ дорівнює a. Через середини ребер BD і CD паралельно AD проведено площину. Знайдіть периметр утвореного перерізу.

а) $1,5a$; б) $3a$; в) $2a$; г) $4a$.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Площини α і β паралельні. Прямі SA, SB, SC перетинають площину α в точках A, B, C, а площину β – у точках A_1, B_1, C_1. M і M_1 – середини відрізків BC і B_1C_1. Знайдіть A_1M_1, якщо $AM = 6$ см і $SA : AA_1 = 3 : 2$.

2. Чи можуть перетинатися діагоналі просторового чотирикутника, не всі вершини якого лежать в одній площині?

3. Побудуйте зображення перпендикулярів, проведених з центра кола, описаного навколо трапеції, до її сторін, якщо діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони.

4. Точки M, N, P, K – середини ребер AD, BD, BC, AC тетраедра $ABCD$. Знайдіть довжини ребер AB і CD, якщо $MP = NK = 10$ см і $\angle KMP = 60°$. Доведіть, що $DC \parallel (MNK)$.

5. Площина α перетинає сторону AB трикутника ABC в її середині і паралельна стороні AC. Знайдіть площу $\triangle ABC$, якщо площа чотирикутника, який відтинає від трикутника площина α, дорівнює 24 см^2.

6. $ABCD$ – правильний тетраедр, O – центр вписаного в трикутник ABC кола. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку O і паралельна BC і AD. У якому відношенні ця площина ділить відрізок EF, якщо E і F – середини ребер AD і BC?

7. Точки M і N лежать відповідно на ребрах AB і CD паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте лінію перетину площин (AA_1N) і (DD_1M). Доведіть, що вона паралельна AA_1.

8. У чотирикутній піраміді $SABCD$ O_1 і O_2 – точки перетину медіан граней SAD і SDC. Чи паралельна пряма O_1O_2 площині (SAC)?

9. У просторі проведено три прямі, які не лежать в одній площині і при цьому жодні дві з них не мимобіжні. Доведіть, що всі ці прямі проходять через одну точку або паралельні.

10. Усі ребра чотирикутної піраміди $SABCD$ дорівнюють по 12 см. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через середину ребра SC паралельно площині (ASM), де M – середина CD. Знайдіть периметр утвореного перерізу.

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 3

1 Якщо дві прямі мають тільки одну спільну точку, кажуть, що вони перетинаються. Іноді їх називають *пересічними* прямими.

2 Дві прямі в просторі можуть перетинатися, бути паралельними або мимобіжними. Дві прямі називають *мимобіжними*, якщо вони не лежать в одній площині. Якщо одна з двох прямих, які не перетинаються, лежить у деякій площині, а друга перетинає цю площину, то такі прямі мимобіжні (ознака мимобіжності прямих).

3 Дві прямі простору, які лежать в одній площині і не перетинаються, називають *паралельними прямими*. Два промені або відрізки, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називають паралельними.

4 Відношення паралельності прямих рефлексивне ($a \parallel a$), симетричне (якщо $a \parallel b$, то і $b \parallel a$) і транзитивне (якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$). Три або більше попарно паралельних прямих простору можуть не лежати в одній площині.

5 Через будь-яку точку простору можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій.

6 Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.

7 *Пряма і площина називаються паралельними*, якщо вони не мають спільних точок. Якщо пряма a паралельна якій-небудь прямій площини α, але не лежить у цій площині, то $a \parallel \alpha$ (ознака паралельності прямої і площини).

8 *Дві площини називаються паралельними*, якщо вони не перетинаються. Паралельні площини або не мають спільних точок або суміщаються всіма своїми точками.

9 Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини паралельні двом прямим другої площини, то такі площини паралельні (ознака паралельності площин).

10 Якщо одну з паралельних площин перетинає яка-небудь пряма або площина, то вона перетинає й другу площину. Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих. Паралельні площини, перетинаючи паралельні прямі, відтинають від них рівні відрізки.

11 При паралельному проектуванні відрізки, не паралельні проектуючій прямій, зображаються відрізками; паралельні відрізки – паралельними відрізками, при цьому відношення їх довжин зберігається.

12 *Зображенням фігури* називають фігуру, подібну проекції даної фігури на деяку площину.